

Étude d'un capteur capacitif

Champ électrique d'un système de deux plans conducteurs.

1.1.1

- Invariances des sources :
Toute translation le long des axes Ox et Oy laisse la distribution de charges invariante donc le champs ne dépend que de z en coordonnées cartésiennes :

$$E_1(M) = E_1(z)$$

- Symétries :
Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution alors le champs $\vec{E}_1(M)$ appartient à chacun de ces plans donc il appartient à leurs intersection et par conséquent :

$$\vec{E}_1(M) = E_1(M) \vec{e}_z$$

Finalement :

$$\vec{E}_1(M) = E_1(z) \vec{e}_z$$

1.1.2

En M on a $\rho(M)$, donc l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\text{div } \vec{E}_1(M) = 0 \text{ c-à-d } \frac{dE_1(z)}{dz} = 0 \text{ donc :}$$

$$E_1(M) = cte$$

Soient deux points M et M' , symétriques par rapport au plan chargé (P_1) et au voisinage immédiat de celui, de coordonnées $M(0,0,z)$ et $M'(0,0,-z)$.

La relation de passage de part et d'autre du plan (P_1) donne :

$$\vec{E}_1(M) - \vec{E}_1(M') = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_{M' \rightarrow M}$$

$$\vec{E}_1(z) - \vec{E}_1(-z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ c-à-d :}$$

$$E_1(z) \vec{e}_z - E_1(-z) \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ soit :}$$

$$E_1(z) - E_1(-z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Or le plan (P_1) est un plan de symétrie

de la distribution alors :

Si $M' = \text{Sym}_{/P_1}(M)$ alors :

$$\vec{E}_1(M') = \text{Sym}_{/P_1}(\vec{E}_1(M)) \text{ donc :}$$

$$E_1(-z) \vec{e}_z = \text{Sym}_{/P_1}(E_1(z) \vec{e}_z) = -E_1(z) \vec{e}_z \text{ donc :}$$

$E_1(-z) = -E_1(z)$ ($E(z)$ ici est une fonction impaire) et la relation de passage donne donc :

$$2E_1(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ et donc :}$$

- Si $z > 0$ alors :
$$\vec{E}_1(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

- Si $z < 0$ on a :
$$\vec{E}_1(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

• Le potentiel V_1 correspondant à \vec{E}_1 est donné par :

$$\vec{E}_1(M) = -\text{grad}(V_1(M)) \text{ et sachant que } V_1(M) = V_1(z) \text{ alors : } E_1(z) = -\frac{dV_1}{dz} \text{ c-à-d}$$

pour $z > 0$ on a :
$$\frac{dV_1}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ ce qui donne :}$$

$$V_1(z > 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + cte$$

de même pour $z < 0$ on a :

$$V_1(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + cte$$

1.2.1

D'après la question précédente, Le champs \vec{E}_2 créé en M de coordonnées $z < d$ par (P_2) est :

- $$\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{e}_z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Et pour $z > d$ on a :

- $$\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (\vec{e}_z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Et sachant que le champs créé par (P_1) est donné par :

Pour $z > 0$:

- $$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\vec{e}_z)$$

Et pour $z < 0$ on a :

- $$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{e}_z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Donc par superposition le champ to-

tal pour un point M entre les plans (P_1) et (P_2) est :

$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$ soit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Le potentiel V correspondant à \vec{E} dans cette région est donné par :

$\vec{E} = -\text{grad}V$ soit :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{dV}{dz} \text{ ce qui donne :}$$

$$V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + cte'$$

• Pour $z > d$ on a : $\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ soit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{E}(M) = \vec{0}$$

Le potentiel dans cette région est donné par :

$$\vec{E}(M) = -\text{grad}(V(M)) = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z = \vec{0}$$

donc $V = cte_1$

$$V(z \geq d) = cte_1$$

• De même pour la région $z < 0$ on a :

$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ soit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{e}_z) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{e}_z) = \vec{0}$$

$$\vec{E}(M) = \vec{0}$$

Le potentiel dans cette région aussi est donné par :

$$\vec{E}(M) = -\text{grad}(V(M)) = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z = \vec{0}$$

donc $V = cte_2$

$$V(z \leq 0) = cte_2$$

1.2.2

• Pour $0 \leq z \leq d$ on a :

$V(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + cte'$ puisque $V(z=0) = V_1$ alors $cte' = V_1$ et donc le potentiel V a pour expression :

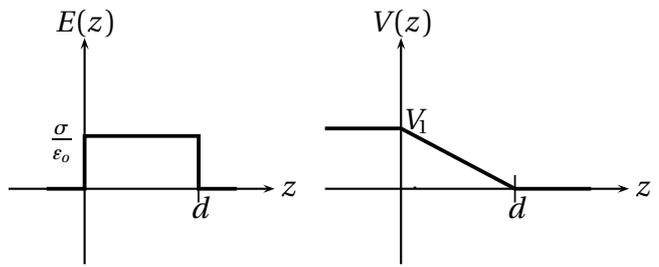
$$V(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + V_1$$

Notons qu'on a montré que les potentiels sont constants pour $z > d$ et pour $z < 0$ et donc :

par continuité en $z = 0$ on a $V(z \leq 0) = V(z = 0) = V_1 = cte_2$ et par continuité en $z = d$ on a $V(z \geq d) = V(z = d) = 0 = cte_1$

Les courbes des champs et potentiels

sont les suivants :



2-Condensateur plan

2.1

Un conducteur en équilibre électrostatique est un conducteur dont les charges sont immobiles à l'échelle mésoscopique.

Un condensateur est un système constitué de deux conducteurs électriques en influence totale.

2.2

Pour négliger les effets de bord il faut que les dimensions des armatures soient très grandes devant la distance séparant celles-ci.

2.3

Dans l'approximation où les armatures forment un condensateur plan, on peut dire que celles-ci sont en influences totales et donc $Q_1 + Q_2 = 0$ soit :

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

La charge Q du condensateur est la charge portée par l'armature liée au potentiel le plus élevé.

2.4

La capacité C d'un condensateur de charge Q ($Q > 0$ resp $Q < 0$) et de d.d.p à ces bornes U ($U > 0$ resp $U < 0$) est définie par :

$$C = \frac{Q}{U}$$

• On a trouvé que le potentiel entre les armatures d'un condensateur plan (1.2.1) s'écrit par :

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + V_1 \text{ donc :}$$

$$U = V_1 - V_2 = V(z=0) - V(z=d) \Rightarrow$$

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times 0 + V_1 - \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} d + V_1\right) \text{ soit :}$$

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \text{ et puisque } \sigma = \frac{Q}{S} \text{ alors :}$$

$$U = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} = C_0 Q \text{ ce qui donne :}$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

2.5.1

La capacité d'un condensateur plan rempli d'un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ est obtenue en remplaçant la permittivité du vide ε_0 par ε soit $C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon_r C_0$ et puisque $\varepsilon_r > 1$ alors l'intérêt d'introduire un matériau diélectrique entre les plaques d'un condensateur est d'augmenter la capacité de celui-ci.



Si v est la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu de permittivité ε et de perméabilité $\mu = \mu_0$ alors d'après l'équation d'onde on a $v^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon}$ donc

$$\mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 v^2 = 1 \text{ c-à-d } \varepsilon_r \frac{v^2}{c^2} = 1$$

(car $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$) et puisque $v < c$ alors $\varepsilon_r > 1$.

2.5.2

Le diélectrique est constitué de charges électriques liées formant des dipôles (contrairement à un conducteur), une fois introduit dans un condensateur, ses charges qui sont liées se polarisent suivant la direction du champs, les charges positives s'orientent vers l'armature négative et les charges négatives vers l'armature positives, donc par influence, des charges supplémentaires apparaissent dans chaque armatures (fournis par le générateur pour maintenir le potentiel constant) et donc la charge Q augmente, et puisque $U = \frac{Q}{C} = cte$ alors la capacité C augmente

2.5.3



Cette question est identique à la suivante!

2.5.4

D'après le schéma du condensateur muni de la lame d'épaisseur e' on peut dire que ce condensateur est équivalent à l'association en série de trois condensateur; le premier d'armatures P_1 et la face gauche de la lame, donc de permittivité ε_0 (air \equiv vide), le deuxième d'armature celle de la lame de permittivité ε et d'un troisième d'armatures la face droite

de la lame et (P_2). donc :

$$\frac{1}{C} = \frac{e_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{e'}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S} + \frac{e_2}{\varepsilon_0 S}$$

et sachant que $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ alors :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \left(\frac{e_1}{d} + \frac{e'}{\varepsilon_r d} + \frac{e_2}{d} \right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \left(\frac{e_1 + e_2}{d} + \frac{e'}{\varepsilon_r d} \right)$$

Or $d = e_2 + e' + e_1$ alors :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \left(\frac{d - e'}{d} + \frac{e'}{\varepsilon_r d} \right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0 d} \left(d - e' + \frac{e'}{\varepsilon_r} \right) \Rightarrow$$

$$C = C_0 \frac{d}{d + \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right) e'}$$

$$C = \frac{C_0}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right) \frac{e'}{d}}$$

On vérifie bien que si :

- $e' = 0$ (pas de lame) alors $C = C_0$
 - $\varepsilon_r = 1$ c-à-d $\varepsilon = \varepsilon_0$ (vide) alors $C = C_0$
 - $e' = d$ c-à-d capacité d'un condensateur rempli du diélectrique, alors $C = \varepsilon_r C_0$
- donc formule conforme avec les résultats précédents.

3-C charge du condensateur plan

3.1

La loi des mailles donne : $v + Ri = U_0$ or

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} \text{ et } i = \frac{dq(t)}{dt} \text{ alors :}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{\tau} = \frac{U_0}{R} \text{ où } \tau = RC \text{ donc la}$$

solution particulière est :

$$q_p = CU_0 \text{ et la solution sans second}$$

membre est $q_{ssm} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ donc :

$$q(t) = CU_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \text{ et puisque } q(0) = 0$$

alors :

$$q(t) = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

3.2

La puissance instantanée $\mathcal{P}_1(t)$ délivrée par le générateur au reste du circuit est donnée par :

$\mathcal{P}_1(t) = U_0 i(t)$, donc l'énergie fournie par le générateur pendant la charge totale du condensateur s'écrit par :

$$W_1 = \int_0^\infty \mathcal{P}_1 dt = \int_0^\infty U_0 i(t) dt$$

$$W_1 = U_0 \int_0^\infty dq(t) = U_0 (q(\infty) - q(0))$$

ce qui donne :

$$W_1 = CU_o^2$$

La puissance instantanée $\mathcal{P}_2(t)$ emmagasinée dans le condensateur est donnée par :

$$\mathcal{P}_2(t) = v(t)i(t) = \frac{q(t)}{C} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{2C} \frac{d}{dt}(q^2(t))$$

Et donc l'énergie emmagasinée dans pendant la durée de charge est :

$$W_2 = \int_0^\infty \mathcal{P}_2 dt = \int_0^\infty \frac{1}{2C} \frac{d}{dt}(q^2(t)) dt$$

soit :

$$W_2 = \frac{1}{2C}(q^2(\infty) - q^2(0)) \text{ ce qui donne :}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} CU_o^2$$

L'énergie dissipée par effet Joule peut être calculée par application du bilan énergétique suivant :

$W_1 = W_2 + W_3$ donc :

$$W_3 = \frac{1}{2} CU_o^2$$

Le calcul direct donne :

$$W_3 = \int_0^\infty Ri^2(t) dt \text{ or } i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\tau} CU_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$W_3 = \int_0^\infty \frac{RC^2 U_o^2}{\tau^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \left[-\frac{RC^2 U_o^2}{2\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty$$

$$W_3 = \frac{1}{2} CU_o^2$$

3.3

Les équation de Maxwell dans le vide s'écrivent :

- $\text{div } \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_o}$
- $\text{rot } \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$
- $\text{div } \vec{B}(M, t) = 0$
- $\text{rot } \vec{B}(M, t) = \mu_o(\vec{j}(M, t) + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t})$

Sous forme intégrale elles s'écrivent :

$$\iiint_{V(\Sigma)} \text{div } \vec{E} \cdot dV = \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_o} dV$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet d'écrire :

$$\oiint_{\Sigma(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_o}$$

Donc cette relation locale exprime le théorème de Gauss.

• De même :

$$\iiint_{V(\Sigma)} \text{div } \vec{B} \cdot dV = \oiint_{\Sigma(V)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ce qui exprime que le flux du champ magnétique est conservatif à travers toute surface fermée.

• Le théorème d'Ampère-Stokes donne :

$$\iint_{\Sigma(\Gamma)} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

soit :

$$\oint_{\Gamma(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_{enlac} + \mu_o \epsilon_o \iint_{\Sigma(\Gamma)} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

La relation locale correspondante exprime donc le théorème d'Ampère généralisé.

• De même :

$$\iint_{\Sigma(\Gamma)} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$e = \oint_{\Gamma(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ce qui exprime donc la loi de Faraday.

3.4

D'après 1.2.1 on a : $q(t) = CU_o(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ et puisque $\vec{E}(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \vec{e}_z$ alors

$$\vec{E}(t) = \frac{q(t)}{S\epsilon_o} \vec{e}_z \text{ soit :}$$

$$\vec{E}(t) = \frac{CU_o}{S\epsilon_o} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \vec{e}_z \text{ or } C = \frac{\epsilon_o S}{d} \text{ donc :}$$

$$\vec{E}(t) = \frac{U_o}{d} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \vec{e}_z$$

On déduit le courant de déplacement :

$$\vec{j}_D = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ soit :}$$

$$\vec{j}_D = \frac{\epsilon_o U_o}{\tau d} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{e}_z$$

3.5

La relation locale de Maxwell-Ampère à l'intérieur du condensateur s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ car } (\vec{j} = \vec{0})$$

La forme intégrale correspondante est donnée par :

$$\oint_{\Gamma(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \epsilon_o \iint_{\Sigma(\Gamma)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

3.6

 Notons ici que la cause du champ magnétique, demandé, à l'intérieur du condensateur est la variation du champs électrique c-à-d la densité de courant de déplacement et non les courants de conduction car l'espace entre les armatures n'est pas conducteur ($\vec{j} = \vec{0}$).

Tout plan contenant Oz est plan de symétrie de cette cause (\vec{E} est uniforme à t donné) donc :
 $\vec{B}(M, t) = B(M, t) \vec{e}_\theta$ car \vec{B} est normale à ces plans.

L'invariance :

Le problème est invariant par toute rotation θ autour de Oz donc B ne dépend pas de θ en coordonnées cylindriques.

De même la densité de courant de déplacement est invariante par translation le long de Oz donc B ne dépend pas de z , et donc B ne dépend que de r en coordonnées cylindriques.

Finalement : $\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_\theta$

Les lignes de champs sont des cercles centrés sur l'axe Oz , (car si $r = ct e$ alors $B = ct e'$ et \vec{B} est suivant \vec{e}_θ).

3.7

On a : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\oint_{\Gamma(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma(\Gamma)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

On choisira pour surface ouverte la section droite du contour circulaire Γ de rayon r .

ce qui donne :

$$2\pi r B(r, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{CU_0}{S \epsilon_0 \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \pi r^2$$

$$B(r, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{CU_0 r}{2S \epsilon_0 \tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ or } C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \text{ donc :}$$

$$\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 U_0 r}{2d\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{e}_\theta$$

Et donc :

$$B_0(r) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 U_0 r}{2d\tau}$$

3.8

$$\vec{\Pi}(M, T) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} \text{ donc :}$$

$$\vec{\Pi}(M, T) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{U_0}{d} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 \epsilon_0 U_0 r}{2d\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{e}_\theta \right)$$

$$\vec{\Pi}(M, t) = -\frac{\epsilon_0 U_0^2 r}{2\tau d^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{e}_r$$

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\epsilon_0 U_0^2 r}{2\tau d^2} (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{e}_r$$

La direction du vecteur de Poynting est radiale, c-à-d la puissance est rayonnée à travers la surface latérale.

Le vecteur $\vec{\Pi}$ est la puissance rayonnée par unité de surface.

3.9

La puissance rayonnée à travers la surface latérale en $r = a$ est :

$\mathcal{P} = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi}(a, t) \cdot d\vec{S}$ sur la surface latérale on a $d\vec{S} = 2\pi a dz \vec{e}_r$, donc :

$$\mathcal{P} = \int_0^d \Pi(a, t) 2\pi a dz$$

$$\mathcal{P} = \frac{\epsilon_0 U_0^2 a}{2\tau d^2} (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) e^{-\frac{t}{\tau}} 2\pi a d$$

$$\mathcal{P} = \frac{\pi \epsilon_0 U_0^2 a^2}{\tau d} (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3.10

L'énergie sortant de l'espace entre armatures pendant la charge du condensateur est donnée par :

$$W_s = \int_0^\infty \mathcal{P} dt \text{ c-à-d :}$$

$$W_s = \int_0^\infty \frac{\pi \epsilon_0 U_0^2 a^2}{\tau d} (e^{-\frac{t}{\tau}} - 1) e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$W_s = \frac{\pi \epsilon_0 U_0^2 a^2}{\tau d} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt - \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} dt \right]$$

$$W_s = \frac{\pi \epsilon_0 U_0^2 a^2}{\tau d} \left[\frac{\tau}{2} - \tau \right] = -\frac{\pi \epsilon_0 U_0^2 a^2}{2d}$$

Donc l'énergie entrant dans l'espace entre les armatures est :

$$W_E = -W_s = \frac{\pi \epsilon_0 U_0^2 a^2}{2d} \text{ et puisque}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \text{ alors :}$$

$$W_E = \frac{1}{2} C U_0^2$$

On retrouve l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur.

4 Condensateur en régime sinusoïdal forcé

4.1

Dans ces approximations on a :

$$\vec{E}(t) = \frac{U(t)}{d} \vec{e}_z \text{ soit :}$$

$$\vec{E}(t) = \frac{U_0}{d} \cos \omega t \vec{e}_z$$

car champs est uniforme (non permanent).

On obtient le même résultat si on calcule E par :

$$\vec{E}(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{q(t)}{S \epsilon_0} \vec{e}_z$$

4.2

Le théorème d'Ampère généralisé entre les armatures s'écrit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Et sachant que $\vec{B}(M) = B(r, t) \vec{e}_\theta$ alors on peut choisir le contour Γ un cercle de rayon r orienté suivant \vec{e}_θ (donc $B(r, t) = cte$ sur ce cercle à t donné) et Σ la surface de section droite s'appuyant sur Γ . Ce qui donne :

$$2\pi r B(r, t) = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{-\omega U_0}{d} \right) \sin \omega t \times \pi r^2$$

finalement :

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{\omega U_0 r}{2d c^2} \sin \omega t \vec{e}_\theta$$

($\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$)

4.3

La densité volumique d'énergie électrique est donnée par :

$$w_e(t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(t) \text{ soit :}$$

$$w_e(t) = \frac{\epsilon_0 U_0^2}{2d^2} \cos^2 \omega t$$

De même la densité volumique d'énergie magnétique w_m est :

$$w_m(t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(t) \text{ c-à-d :}$$

$$w_m(t) = \frac{\epsilon_0 U_0^2 \omega^2 r^2}{8d^2 c^2} \sin^2 \omega t$$

($\mu_0 c^2 = \frac{1}{\epsilon_0}$)

4.4

Les valeurs moyennes des densités volumiques qu'on notera par :

$w_{e,m}$ (électrique) et $w_{m,m}$ (magnétique) s'écrivent :

$$w_{e,m} = \frac{1}{T} \int_0^T w_e(t) dt \quad \text{et} \quad w_{m,m} = \frac{1}{T} \int_0^T w_m(t) dt$$

et sachant que les valeurs moyenne $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}$ (Il suffit de linéariser $\cos^2(\omega t)$)

de même $\langle \sin^2(\omega t) \rangle_T = \frac{1}{2}$ alors :

$$w_{m,e} = \frac{\epsilon_0 U_0^2}{4d^2} \quad \text{et} \quad w_{m,m} = \frac{\epsilon_0 U_0^2 \omega^2 r^2}{16d^2 c^2} \quad \text{et} \quad \text{donc :}$$

$$\frac{w_{m,m}}{w_{e,m}} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}$$

On peut négliger $w_{m,m}$ devant $w_{e,m}$ si $\frac{w_{m,m}}{w_{e,m}} \ll 1$ c-à-d :

$\frac{w_{m,m}}{w_{e,m}} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \ll 1$ soit $r^2 \ll \frac{4c^2}{\omega^2}$ or la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique correspondant au signal électrique utilisé est lié à c et ω par $\lambda = \frac{c}{\omega}$ donc

il faut que :

$r^2 \ll 4\lambda$ soit $r \ll 2\lambda$ cette relation sera largement vérifiée si :

$$a \ll 2\lambda$$

Cette condition constitue l'approximation des régimes quasi-stationnaire.

4.5

La condition précédente est vérifiée si $a \ll 2\frac{c}{\omega}$ soit $a \ll 2\frac{c}{2\pi f}$ (f étant la fréquence du signal électrique utilisé)

$f \ll \frac{c}{\pi a}$ soit numériquement :

$$f \ll 2 \frac{3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \text{ c-à-d :}$$

$$f \ll 3,18 \text{ GHz}$$

Cette condition est largement vérifiée dans les montages électriques usuels.

4.6

Le vecteur de Poynting pour $r = a$ est donné par :

$$\vec{\Pi}(a, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow$$

$$\vec{\Pi}(a, t) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{U_0}{d} \cos \omega t \vec{e}_z \wedge \left(-\frac{\omega U_0 a}{2d c^2} \sin \omega t \right) \vec{e}_\theta \right)$$

$$\vec{\Pi}(a, t) = \frac{\omega U_0^2 a}{2\mu_0 d^2 c^2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \vec{e}_r$$

Le flux Φ rentrant du $\vec{\Pi}$ est donné par :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

où Σ est la surface latérale (puisque Π est radiale) et l'élément de surface $d\vec{S}$ sur cette surface est :

$d\vec{S} = -2\pi a dz \vec{e}_r$ (il est suivant $(-\vec{e}_r)$ car ce n'est pas un flux sortant mais rentrant à Σ).

$$\Phi = \int_0^d \frac{\omega U_0^2 a}{2\mu_0 d^2 c^2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \vec{e}_r \cdot (-2\pi a dz \vec{e}_r)$$

$$\Phi = -\frac{\omega U_0^2 \pi a^2}{\mu_0 d c^2} \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

or $\mu_0 c^2 = \frac{1}{\epsilon_0}$ et $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$ alors :

$$\phi = -\omega C U_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

Ce flux n'est autre que la puissance rayonnée à un signe près dont la valeur moyenne sur une période est nulle car $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle_T = 0$.

5. Application : Capteur capacitif

5.1

Les deux condensateurs ainsi constitués sont montés en parallèle car leurs armatures sont portées à la même différence de potentiel.

5.2

En appliquant l'expression de la capacité du condensateur plan, on trouve :

$$C'_o = \frac{\epsilon_o(L-h) \times \ell}{d} \text{ et } C_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_o(h \times \ell)}{d}$$

donc :

$$C_h = C'_o + C_1 = \frac{\epsilon_o(L-h) \times \ell}{d} + \frac{\epsilon_r \epsilon_o(h \times \ell)}{d}$$

$$C_h = \frac{\epsilon_o L \ell}{d} + \frac{\epsilon_o \ell}{d} (\epsilon_r - 1) h$$

Application numérique :

$$\alpha = \frac{\epsilon_o L \ell}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \times 1 \times 4,31 \cdot 10^{-2}}{2,54 \cdot 10^{-3}} \\ \alpha = 150 \text{ pF}$$

$$\beta = \frac{\epsilon_o \ell}{d} (\epsilon_r - 1)$$

$$\beta = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \times 4,31 \cdot 10^{-2} (80 - 1)}{2,54 \cdot 10^{-3}} \\ \beta = 1,19 \cdot 10^4 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$$

donc si C_h est en pF et h en m alors :

$$\alpha = 150 \text{ et } \beta = 1,19 \cdot 10^4$$

6 Mesure du niveau d'un liquide dans un réservoir

6.1.1

L'amplificateur opérationnel est monté en comparateur (contre-réaction sur la borne non inverseuse) et par conséquent les sorties sont soit $+V_{sat}$ ou $-V_{sat}$.

Lorsque $V_a = +V_{sat}$ on aura

$$v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ (diviseur de tension)}$$

Et lorsque $V_a = -V_{sat}$ on aura

$$v^+ = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$

6.1.2

à $t = 0$ on a $V_a = +V_{sat}$ et la loi des mailles donne :

$$V_a + R'i - v_- = 0 \text{ et } v_- = -\frac{q}{C'} \text{ (convention}$$

générateur) donc $i = -C' \frac{dv_-}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dv_-}{dt} + \frac{v_-}{\tau'} = \frac{V_{sat}}{\tau'} \text{ (avec } \tau' = R'C')$$

La solution est donc :

$$v_-(t) = V_{sat} + A'e^{-\frac{t}{\tau'}} \text{ et sachant qu'à } t = 0 \text{ on a } v_- = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$

$$\text{alors } A' = -\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ finalement :}$$

$$v_-(t) = \left(1 - \frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau'}}\right) V_{sat}$$

On remarque que cette tension augmente lorsque t augmente, donc le condensateur se charge à travers R' jusqu'à ce que

$$v_-(t_c) = v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ cherchons } t_c :$$

$$\left(1 - \frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t_c}{\tau'}}\right) V_{sat} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ donne :}$$

$$\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t_c}{\tau'}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

ce qui donne :

$$t_c = R'C' \ln\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)$$

• Lorsque $t > t_c$ on aura $v_- > v^+$ et la sortie basculera à $V_a = -V_{sat}$ et donc

$$v^+ = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ et la loi des mailles s'écrirait :}$$

$V_a - v_- + R'i = 0$ (courant algébrique de même sens que précédemment).

$$v_- + R'C' \frac{dv_-}{dt} = -V_{sat}$$

$$\frac{dv_-}{dt} + \frac{v_-}{\tau'} = -\frac{V_{sat}}{\tau'}$$

La solution est :

$$v_-(t) = -V_{sat} + A''e^{-\frac{t}{\tau'}} \text{ et puisque}$$

$$v_-(t_c) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ alors :}$$

$$-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = -V_{sat} + A'' \text{ ce qui donne donc :}$$

$$v_-(t) = \left(-1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau'}}\right) V_{sat}$$

Lorsque t augmente v_- diminue et donc le condensateur se décharge à travers R'

v_- diminue jusqu'à ce que

$$v_-(t_d) = v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ et lorsque}$$

$t > t_d$ on aura $v_- < v^+$ et V_a basculera à $-V_{sat}$ et donc le cycle recommence.

Cherchons t_d :

$$v_-(t_d) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ c-à-d :}$$

$$\left(-1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t_d}{\tau'}}\right) V_{sat} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$

$$\Rightarrow t_d = R'C' \ln\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)$$

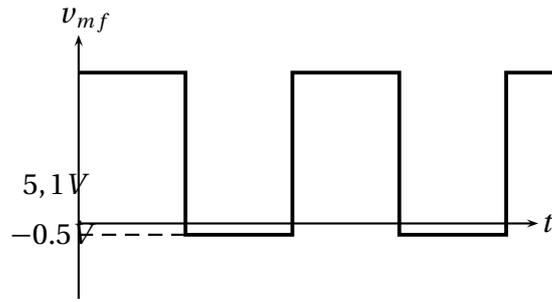
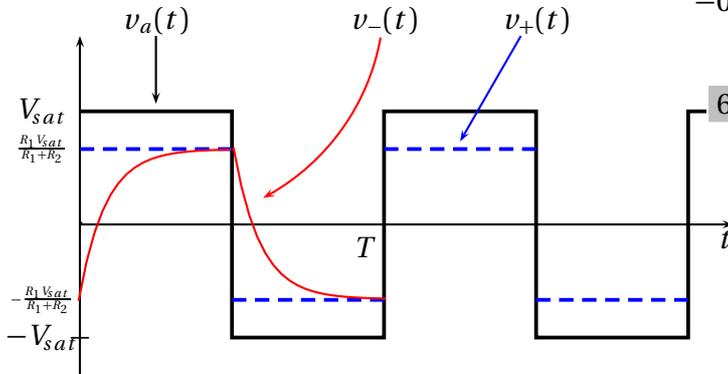
En conclusion le circuit est un oscillateur dans le quel V_a prend pé-

riodiquement les valeurs $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$

expérimentale habituelle $V_{sat} = 15 \text{ V}$)

6.1.3

les courbes demandées sont les suivantes :



6.2.2

La loi des maille donne :

$$v_{mf} + R_p i_z = V_a \Rightarrow$$

(Le texte par cette question suppose que $V_{sat} > 5,1 \text{ V}$ prenons la valeur expérimentale habituelle $V_{sat} = 15 \text{ V}$)

On prendra ici $V_a = \pm V_{sat} = \pm 15 \text{ V}$ donc lorsque $V_a = -15 \text{ V}$ alors $v_{mf} = -0,5 \text{ V}$ et la loi des mailles s'écrit pour $i = 10 \text{ mA}$ et $R_p = R_{pmin}$:

$-0,5 - R_{pmin} \times 10^{-2} = -15$ (courant négatif d'après caractéristique) ce qui donne :

$$R_{pmin} = \frac{15 - 0,5}{10^{-2}} \Rightarrow R_{pmin} = 1,45 \text{ k}\Omega$$

soit une valeur nominale :

$$R_{pmin} = 1,5 \text{ k}\Omega$$

lorsque $V_a = +V_{sat} = 15 \text{ V}$ on aura $v_{mf} = 5,1 \text{ V}$ et donc :

$v_{mf} + R_p i_z = V_{sat}$ soit un courant i_z avec la valeur de $R_p = R_{pmin}$

$5,1 + 1,5 \cdot 10^3 i_z = 15$ ce qui donne :

$$i_z = \frac{15 - 5,1}{1,5 \cdot 10^3} \text{ c-à-d } i_z = 6,6 \text{ mA}$$

donc on a obtenu un courant toujours inférieur à 10 mA donc la valeur de R_p minimale est correcte même lorsque

V_a prend sa valeur maximale. ⚠ On peut aussi donner le résultat en fonction de V_{sat} sans la remplacer par $+15 \text{ V}$, mais on obtiendra seulement des expressions et non des valeurs numériques.

6.1.4

Les temps de charge et de décharge sont calculés la question 6.1.2 donc :

$$T_C = R'C' \ln\left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2}\right) \text{ et aussi } T_d = R'C' \ln\left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2}\right)$$

finalement la période est :

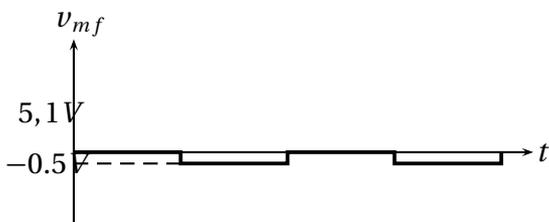
$$T = 2R'C' \ln\left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2}\right)$$

6.2.1

La valeur de V_{sat} n'a pas été donnée on peut donc supposer les deux cas de figure possibles :

$V_{sat} > 5,1 \text{ V}$ et $V_{sat} < 5,1 \text{ V}$

Si $V_{sat} < 5,1 \text{ V}$ on aura la figure suivante :



Et si $V_{sat} > 5,1 \text{ V}$ on aura : Si $V_a = +V_{sat}$ alors $v_{mf} = U_Z = 5,1 \text{ V}$ et si $V_a = -V_{sat}$ on aura $v_{mf} = U_D = -0,5 \text{ V}$ donc l'allure de v_{mf} est la suivante :

(Le texte par cette question suppose que $V_{sat} > 5,1 \text{ V}$ prenons la valeur

6.3.1

On a déjà montré que $C_h = \alpha + \beta h$.

Lorsque le réservoir est vide (pas de fluide à l'intérieur) on a $h = 0$, la capacité est donc celle d'un condensateur plan dont la surface des armatures est $L \times \ell$ donc :

$$C_{hmin} = \alpha$$

$$C_{hmin} = \frac{\epsilon_0 L \ell}{d} = 150 \text{ pF}$$

Puisque $T_i = R_x C_h$ la condition du fonctionnement normale du mono-

stable $R_x C_h > T_0$ donne $R_x > \frac{T_0}{C_h}$ et donc la valeur minimale de R_x correspond à $C_h = C_{h_{min}}$ soit $R_{x_{min}} = \frac{T_0}{C_{h_{min}}}$ c-à-d :

$$R_{x_{min}} = \frac{C_{h_{min}}}{\varepsilon_0 L \ell}$$

Soit :

$$R_{x_{min}} = \frac{10^{-6} \times 2,54 \cdot 10^{-3}}{8,85 \cdot 10^{-12} \times 1 \times 4,31 \cdot 10^{-2}} = 6,66 \text{ k}\Omega$$

soit une valeur nominale :

$$R_{x_{min}} = 6,7 \text{ k}\Omega$$

6.3.2

Lorsque le réservoir est plein la capacité est celle d'un condensateur plan rempli du fluide de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ donc :

$$C_{h_{max}} = \frac{\varepsilon L \ell}{d} = \varepsilon_r \alpha$$

soit numériquement :

$$C_{h_{max}} = 12 \text{ nF}$$

• Pour avoir $T_i < T$ il faut que $R_x C_h < T$ et pour $C_h = C_{h_{max}}$ on aura $R_x < \frac{T}{C_{h_{max}}}$

donc $R_{x_{max}} = \frac{T}{C_{h_{max}}}$ soit numériquement :

$$R_{x_{max}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-9}} = 167 \text{ k}\Omega$$

6.3.3

Calculons T_i :

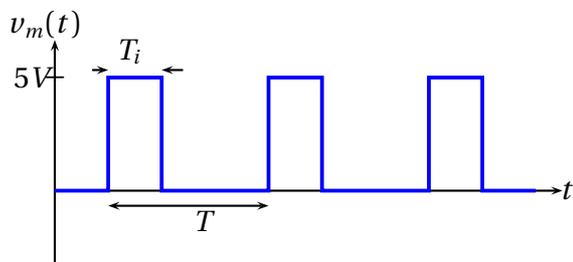
On a $C_h = \alpha + \beta h$ donc :

$C_h = 150 + (1,19 \cdot 10^4 \times 50 \cdot 10^{-2}) \text{ pF}$ ce qui donne :

$C_h = 6,1 \text{ nF}$ donc $T_i = 82,3 \cdot 10^3 \times 6,1 \cdot 10^{-9} \Rightarrow$

$$T_i = 0,5 \text{ ms}$$

L'allure de la tension de sortie du monostable est la suivante (rapport cyclique $\approx 25\%$) :



6.3.4

La valeur moyenne est donnée par définition par :

$$v_{mo} = \frac{1}{T} \int_0^T v_m(t) dt$$

or $v_m(t) = V_{cc}$ si $0 \leq t \leq T_i$ et $v_m = 0$ si $T_i \leq t \leq T$ donc :

$$v_{mo} = \frac{T_i V_{cc} + 0 \times (T - T_i)}{T} = \frac{T_i}{T} V_{cc} \text{ c-à-d :}$$

$$v_{mo} = \frac{R_x C_x}{T} V_{cc}$$

et sachant que $C_x = \alpha + \beta h = C_0 + \beta h$

(car $C_0 = \frac{\varepsilon_0 L \ell}{d}$)

alors :

$$v_{mo} = \frac{R_x (C_0 + \beta h)}{T} V_{cc}$$



Normalement $C_0 = \alpha$ et texte demande le résultat en fonction de α et C_0 , il a peut être voulu dire en fonction de β et non α .

donc :

$$v_{mo} = \frac{R_x (C_0 + \beta h)}{T} V_{cc}$$

Il s'agit donc d'une fonction affine en fonction de la hauteur du fluide h , la mesure de la valeur moyenne v_{mo} nous permet de remonter à la hauteur h .

Pour $R_x = 82,3 \text{ k}\Omega$, v_{mo} varie entre $v_{mo_{min}} = v_{mo}(h=0)$ et $v_{mo_{max}} = v_{mo}(h=L)$ c-à-d :

$$v_{mo_{min}} = \frac{R_x C_0}{T} V_{cc}$$

$$\text{et } v_{mo_{max}} = \frac{R_x (C_0 + \beta L)}{T} V_{cc}$$

Application numérique :

$$v_{mo_{min}} = \frac{82,3 \cdot 10^3 \times 150 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 10^{-3}} \times 5 \text{ soit :}$$

$$v_{mo_{min}} = 31 \text{ mV}$$

Rappelons que $\beta = 1,19 \cdot 10^4 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$ soit $\beta = 1,19 \cdot 10^{-8} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

$$v_{mo_{max}} = \frac{82,3 \cdot 10^3 (150 \cdot 10^{-12} + 1,19 \cdot 10^{-8} \times 1)}{2 \cdot 10^{-3}} \times 5 \text{ soit :}$$

$$v_{mo_{max}} = 0,49 \text{ V}$$

la plage de variation de v_{mo} est :

$$0,031 \text{ V} \leq v_{mo} \leq 0,49 \text{ V}$$

6.4.1

il s'agit d'un filtre passe-bas du premier ordre car lorsque ω tend vers l'infini, le module de la fonction de transfert tend vers zéro et lorsque ω tend vers zéro le module de celle-ci tend vers l'unité.

Lorsque $\omega \gg \omega_0$ on a $H(j\omega) \approx j \frac{\omega_0}{\omega}$ donc le filtre se comporte comme intégrateur si $\omega \gg \omega_0$ et si $\omega \ll \omega_0$

alors $H(j\omega) \simeq 1$ donc $v_s = v_e$ d'où le nom de filtre passe-Bas.

La fréquence de coupure f_c à -3 dB est obtenue par :

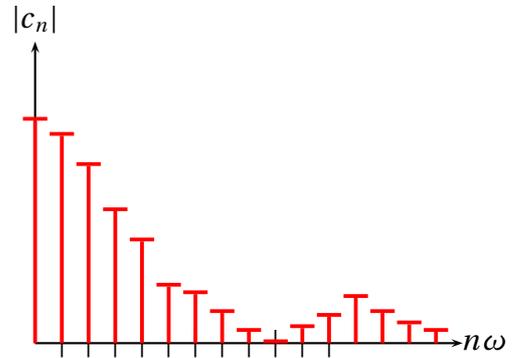
$$|H(j\omega_c)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \text{ c-à-d dans ce cas :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_o^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } H_{max} = 1$$

donc :

$\omega_c = \omega_o$ et par conséquent :

$$f_c = f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$



6.4.2

La valeur moyenne est $v_{mo} = \frac{R_x C_x}{T} V_{cc}$

où $C_x = \alpha + \beta h$ et pour $h = 50$ cm on a :

$$C_x = 150 + (1,19 \cdot 10^4 \times 50 \cdot 10^{-2}) = 6100 \text{ pF}$$

donc :

$$v_{mo} = \frac{82,3 \cdot 10^3 \times 6100 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 10^{-3}}$$

$$v_{mo} = 0,25 \text{ V}$$

Dans l'optique de tracer le spectre de $v_m(t)$, la série de Fourier peut être écrite en notation complexe par :

$$\underline{v}_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega t} \text{ où}$$

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} v_m(t) e^{jn\omega t} dt$$

Puisque :

$$v_m(t) = V_{cc} \text{ si } t \in [0, T_i]$$

et $v_m(t) = 0$ si $t \in]T_i, T[$ alors :

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^{T_i} V_{cc} e^{jn\omega t} dt = \frac{V_{cc}}{jn\omega T} [e^{jn\omega t}]_0^{T_i}$$

$$\underline{C}_n = \frac{2V_{cc}}{n\omega T} \frac{e^{j\frac{n\omega T_i}{2}} - e^{-j\frac{n\omega T_i}{2}}}{2j} \times e^{j\frac{n\omega T_i}{2}}$$

$$\underline{C}_n = \frac{2V_{cc}}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T_i}{2}\right) \times e^{j\frac{n\omega T_i}{2}} \text{ soit :}$$

$$C_n = |\underline{C}_n|$$

$$C_n = \frac{2V_{cc}}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T_i}{2}\right) = \frac{2V_{cc} T_i}{n\omega T_i T} \sin\left(\frac{n\omega T_i}{2}\right)$$

on reconnaît la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$C_n = \frac{V_{cc} T_i}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\omega T_i}{2}\right)$$

Le spectre de $v_m(t)$ pour les harmoniques d'amplitude notables est :

6.4.3

Le filtre étant linéaire on adoptera la notation complexe et donc :

$$\underline{v}_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega t}$$

soit $v_m(t) = \mathcal{I}m(\underline{v}_m)$.

L'expression générale de $v_f(t)$ à la sortie du filtre est :

$$v_f(t) = v_{mo} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + j\frac{n\omega}{\omega_o}} \underline{C}_n e^{j(n\omega t)}$$

(le gain statique $H(0) = 1$)

ou bien :

$$v_f(t) = v_{mo} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V_{m_n}}{1 + j\frac{n\omega}{\omega_o}} e^{j(n\omega t + \varphi_{m_n})}$$

Donc pour ne laisser passer que la valeur moyenne v_{mo} et le fondamental il faut que la fréquence de coupure du filtre vérifie :

$f < f_c \ll 2f$ dans ce cas la sortie sera :

$$v_f(t) = v_{mo} + \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}} v_{m_1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

Donc $V_{f_0} = v_{mo}$ et $v_{f_1} = |\underline{C}_1|$

soit :

$$V_{f_1} = \frac{V_{cc} T_i}{T \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T_i}{2}\right)$$

6.4.4

Pour ne laisser passer que la composante continue c-à-d la valeur moyenne car le fondamentale est

$$f = \frac{1}{T} = 500 \text{ Hz}$$

$$f_c = f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_f C_f} = 0,5 \text{ Hz donc :}$$

$$C_f = 1,44 \cdot 10^{-6} \text{ F soit pratiquement :}$$

$$C_f = 1,5 \mu\text{F}$$

6.4.5

Si on compare l'amplitude du fondamental :

$$v_{f_1} = \frac{V_{cc} T_i}{T \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T_i}{2}\right)$$

$$v_{f_1} = \frac{V_{cc} T_i}{T \sqrt{1 + \frac{f^2}{f_c^2}}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T_i}{2}\right)$$

numériquement :

$$v_{f_1} = \frac{5 \times 10^{-6}}{2.10^{-3} \sqrt{1 + \frac{500^2}{0,5^2}}} \text{sinc}\left(\frac{2\pi \times 500 \times 10^{-6}}{2}\right)$$

Finalement :

$$v_{f_1} \approx 0,031 \text{ mV.}$$

on voit bien que v_{f_1} est très inférieure à 3 mV et par conséquent :

$$v_f(t) \approx v_{f_0}$$

6.5.1

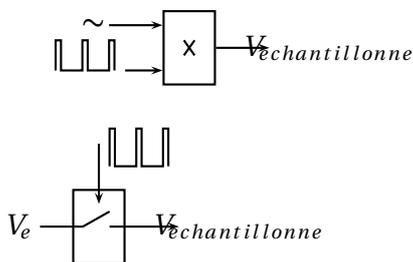
À la sortie du filtre $v_f \approx v_{f_0}$ c-à-d en sortie on a la valeur moyenne du signal $v_m(t)$ cette valeur moyenne est proportionnel à h qui varie continuellement en fonction du temps donc $v_f(t)$ est un signal analogique.

6.5.2

L'échantillonnage consiste à prélever des échantillons pendant des durées brèves T_e d'une façon périodique.

Le nombre d'échantillons par unité de seconde est $N_e = \frac{1}{T_e}$.

On peut proposer un montage à base de multiplieur AD 633 ou interrupteur numérique CD 4066



6.5.3

Un signal numérique, contrairement à un signal analogique, est un signal qui ne prend que des valeurs discrètes généralement $+V = cte$ ou 0 mais pas de tension intermédiaire.

Numériser un signal analogique c'est le convertir à une suite de nombre (binaires c-à-d des 0 et des 1) pour ce

faire on utilise un échantillonneur-bloqueur suivi d'un convertisseur analogique numérique.

L'avantage de la numérisation est de pouvoir traiter le signal numériquement : mémorisation, intégration numérique etc..

6.5.4.1

Si on a un échantillon numérisé sur deux bits, les valeurs possibles sont : (0,0); (0,1) (1,0) et (1,1) soit 4 valeurs c-à-d 2^2 et si on a échantillon numérisé sur 3 bits, on aura 8 valeurs possibles, soit 2^3 .

Donc en générale on a :

2^{n_b} valeurs possibles pour un échantillon numérisé sur n_b bits.

Dans notre cas $N = 8$ donc on a : $2^8 = 256$ valeurs possibles.

6.5.4.2

La résolution du convertisseur utilisé est :

$$q = \frac{2,56 - 0}{2^8 - 1} \approx 10^{-2} \text{ V}$$

Le convertisseur ne peut pas détecter les variations moins de 10^{-2} V donc si on a Δh est la plus petite variation détectable alors puisque :

$v_f(t_2) - v_f(t_1) = 2,438(h_2(t_2) - h_1(t_1))$ alors : $q = 2,438\Delta h_{min}$ c-à-d : $10^{-2} = 2,438\Delta h_{min}$ ce qui donne :

$$\Delta h_{min} = \frac{10^{-2}}{2,438} \text{ soit :}$$

$$\Delta h_{min} = 4,1 \text{ mV}$$

Le nombre minimale de N est obtenu si $h = 0$ dans ce cas $v_f = 0,031 \text{ V}$ soit $3 \times q$ (de 0 à 3) donc :

$$N_{min} = 4$$

Le nombre maximale de N est obtenu si $h = h_{max} = L = 1 \text{ m}$ (ou si le CAN est saturé c-à-d $v_f = V_{max}$).

Pour $h = L$ on $v_f = 0,031 + 2,438 = 2,469 \text{ V}$ soit 247 fois q (de 0 à 247) donc :

$$N_{max} = 248$$

(s'il est saturé on aurais $N_{max} = 256$) mais la valeur maximale est limitée par h et non par la saturation.

6.5.4.3

Puisque la valeur minimale de h détectable est Δh_{min} , donc une variation q de v_f correspond à Δh_{min} et puisque l'incertitude globale Δh correspond à 2,5 fois la valeur de résolution donc :

$\Delta h = 2,5\Delta h_{min}$ soit :

$$\Delta h = 10,25 \text{ mm}$$

(Pratiquement un centimètre)

6.5.4.4

Pour $h = 50 \text{ cm}$ on a :

$$v_f = 0,031 + 2,438h = 0,031 + 2,438 \times 20 \cdot 10^{-2} = 1,25 \text{ V}$$

donc :

$$1,25 = Nq = N \times 10^{-2} \text{ soit :}$$

$$N = 125$$

L'incertitude sur N est : $\Delta N = 1$

Merci de me faire part de vos remarques

e-mail : cpgespe.mp@gmail.com Merci. M.Ouzi