- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*

Etude d'un capteur capacitif

L'épreuve est constituée d'un problème composé de quatre parties relativement indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Après le calcul de la capacité d'un condensateur plan et l'étude du condensateur dans différentes situations, on s'intéresse à montrer qu'on peut utiliser un condensateur pour réaliser un capteur capacitif. On étudie ensuite une chaine d'acquisition d'une grandeur physique, la hauteur du niveau d'un liquide dans un réservoir.

Données :

- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}\ S.I.$
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.
- $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.

1. Champ électrostatique d'un système de deux plans conducteurs

1.1. On considère dans un premier temps un conducteur plan (P_1) d'axe (Oz), de surface S d'épaisseur négligeable placé dans l'air dont les propriétés électriques et magnétiques sont celles du vide (figure 1). Le plan (P_1) correspond au plan (Oxy) du système de coordonnées cartésiennes (Ox, Oy, Oz) auquel on associe la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). Le conducteur porte une charge répartie uniformément par unité de surface $\sigma_1 = \sigma$ $(\sigma > 0)$. Afin d'étudier les symétries et les invariances, on suppose que le plan est illimité.

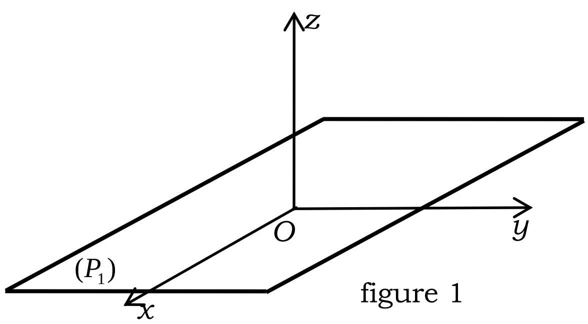

figure 1

1.1.1. Montrer que le champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé par le plan (P_1) en tout point M est de la forme $\vec{E}_1(M) = E_1(z)\vec{e}_z$.

1.1.2. Ecrire l'équation locale de Maxwell-Gauss et montrer que $E_1(z)$ est constant. En utilisant les conditions aux limites, achever la détermination du champ électrostatique et donner l'expression de $E_1(z)$ en tout point de l'espace. En déduire le potentiel électrostatique $V_1(z)$ dont dérive le champ $\vec{E}_1(M)$.

1.2. On superpose au premier plan (P_1) un deuxième plan conducteur (P_2) identique et parallèle au premier (figure 2). Le plan (P_2) est situés en $z = d$ $(d > 0)$.

Les deux conducteurs métalliques ont la même surface S supposée très grande devant le carré de la distance d. Le conducteur (P_2) porte une charge répartie uniformément par unité de surface $\sigma_2 = -\sigma$. L'ensemble est situé dans l'air assimilé au vide.

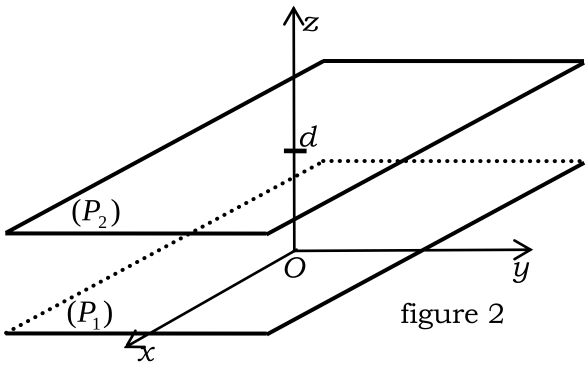

figure 2

1.2.1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par le système des deux conducteurs en tout point de l'espace. En déduire la distribution de potentiel $V(M)$ dont dérive le champ $\vec{E}(M)$.

1.2.2. Tracer les allures des courbes donnant le champ $E(M)$ et le potentiel $V(M)$ en précisant les valeurs aux points remarquables. On prendra $V(z = 0) = V_1$.

2. Condensateur plan

Le système étudié dans la question précédente constitue un condensateur plan formé des deux conducteurs (armatures) métalliques (P_1) et (P_2) en équilibre électrostatique. Les deux armatures sont de forme rectangulaire (longueur L et largeur l) et distantes de d (figure 2). L'armature supérieure (P_2) est portée au potentiel V_2 et l'armature inférieure (P_1) est portée au potentiel V_1. On pose $U = V_1 - V_2$.

2.1. Rappeler la définition d'un conducteur en équilibre électrostatique et celle d'un condensateur électrique.

2.2. Pour que le condensateur plan vérifie la définition de la question précédente, on néglige les effets de bord. Préciser, qualitativement, les conditions que doivent vérifier les armatures pour que l'approximation soit valable.

2.3. On note Q_1 la charge de l'armature (P_1), Q_2 celle de l'armature (P_2). Définir la charge Q de ce condensateur.

2.4. Après avoir défini la capacité C d'un condensateur et en utilisant l'expression du champ électrostatique calculé dans la question **1.2.1**, montrer que la capacité du condensateur plan est donné par $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$.

2.5. On introduit une lame diélectrique d'épaisseur e' et de constante diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ entre les armatures du condensateur plan (figure 3), ε_r

étant la permittivité relative ε_r du milieu. On note $\vec{E}_0$ le champ créé par le condensateur entre ses armatures. Ce champ $\vec{E}_0$ polarise uniformément le diélectrique.

2.5.1. Quel est l'intérêt pratique d'introduire un matériau diélectrique entre les armatures d'un condensateur ?

2.5.2. Décrire les phénomènes électriques qui se produisent lorsqu'on introduit ce diélectrique.

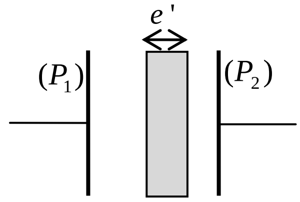

figure 3

2.5.3. Déterminer la capacité C en fonction de la capacité dans le vide C_0 quand le diélectrique occupe seulement une partie du volume d'épaisseur e' par rapport à l'épaisseur totale d.

2.5.4. Déterminer la capacité C du condensateur en fonction de C_0, ε_r et e' et vérifier le résultat en étudiant les cas limites : $e'=0$; $\varepsilon_r=1$; $e'=d$.

3. Charge lente du condensateur plan

Les armatures du condensateur plan étudié précédemment sont supposées circulaires de rayon a situées à la distance d l'une de l'autre. On s'intéresse à la charge, supposée lente, du condensateur inséré dans le circuit de résistance R (figure 4). Le milieu entre les armatures est assimilé au vide. Le condensateur étant initialement déchargé $(q(t=0)=0)$, on le charge à l'aide d'un générateur idéal de tension de f.é.m. constante.

3.1. Déterminer l'expression de la charge $q(t)$ portée par l'armature (P_1) en fonction du temps.

3.2. Déterminer, pendant la durée de la charge totale du condensateur, l'énergie W_1 fournie par le générateur, l'énergie W_2 emmagasinée par le condensateur et l'énergie W_3 dissipée par effet Joule.

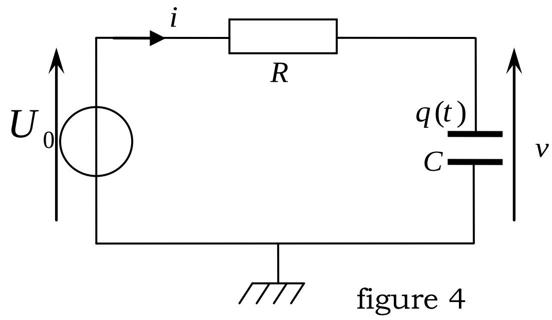

figure 4

3.3. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide sous forme locale en présence de charge et de courant et donner leurs expressions intégrales ainsi que leur signification physique.

3.4. On suppose que la charge $q(t)$ varie suffisamment lentement pour que l'expression du champ électrique calculée dans la question **1.2.1** reste valable. On suppose cette condition vérifiée dans la suite. Exprimer en fonction de t, U_0, d, $\tau=RC$ et ε_0 le champ électrique $\vec{E}(t)$. En déduire l'expression de la densité de courant de déplacement $\vec{J}_D$.

3.5. Ecrire la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère dans le cas particulier de l'espace entre les armatures du condensateur.

3.6. On repère un point M de l'espace inter-armature par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) et on note $\left(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z\right)$ la base correspondante. Justifier rigoureusement que le champ magnétique entre les armatures du condensateur peut s'écrire sous la forme $\vec{B}(M,t)=B(r,t)\vec{e}_\theta$. Quelle est la forme des lignes de champ du champ magnétique ?

3.7. Montrer que le champ magnétique entre les armatures s'écrit : $\vec{B}(M,t)=B_0(r)\exp(-\frac{t}{\tau})\vec{e}_\theta$. Donner l'expression de $B_0(r)$.

3.8. Montrer que le vecteur de Poynting au point M peut s'écrire : $\vec{\Pi}(M,t)=\frac{\varepsilon_0 U_0^2 r}{2\tau d^2}\left(\exp(-\frac{t}{\tau})-1\right)\exp(-\frac{t}{\tau})\vec{e}_r$. Commenter la direction de ce vecteur et donner sa signification physique.

3.9. En déduire la puissance rayonnée sortant de l'espace entre les armatures délimité par la surface latérale du cylindre d'axe (Oz) et de rayon a.

3.10. Déterminer alors l'énergie électromagnétique qui est entrée dans cet espace pendant la charge du condensateur. Conclure.

4. Condensateur en régime sinusoïdal forcé

On relie maintenant le condensateur étudié dans la partie précédente à un générateur idéal de tension de f.é.m. sinusoïdale $U=U_0\cos(\omega t)$. On suppose que la charge se répartit uniformément sur les armatures et que les variations temporelles sont suffisamment lentes pour que le champ électrique entre les armatures conserve la même expression qu'en régime stationnaire.

4.1. Exprimer le champ électrique $\vec{E}(t)$ en tout point entre les armatures du condensateur.

4.2. Etablir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ entre les du condensateur.

4.3. Calculer la densité volumique w_e d'énergie électrique et la densité volumique w_m d'énergie magnétique.

4.4. Montrer que le rapport de la densité volumique moyenne d'énergie magnétique sur la densité volumique moyenne d'énergie électrique s'écrit : $\frac{w_m}{w_e}=\frac{\omega^2 r^2}{4c^2}$. A quelle condition sur le a peut-on négliger w_m devant w_e. Que représente physiquement cette condition ?

4.5. Si $a=3\,cm$, dans quelle domaine de fréquence la condition établie dans la question précédente est-elle vérifiée ? Cette condition est-elle vérifiée dans les montages usuels ?

4.6. Calculer le vecteur de Poynting pour $r=a$, puis le flux rentrant de ce vecteur à l'intérieur du condensateur. Interpréter.

5. Application : Capteur capacitif

On plonge le condensateur formé des deux armatures (P_1) et (P_2) dans une cuve contenant un liquide (F) isolant de permittivité électrique relative ε_r (figure 5). Les deux armatures sont de forme rectangulaire (longueur L et largeur l) et distantes de d. Le liquide est assimilé à un diélectrique homogène, linéaire et isotrope. Le niveau du liquide est repéré par la hauteur h $(0 \leq h \leq L)$. L'air surmontant le liquide est de l'air que l'on assimile de point de vue électrique au vide.

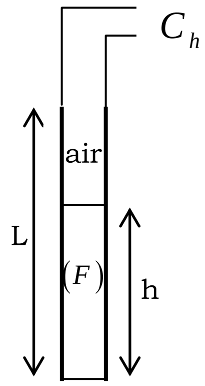

figure 5

5.1. On peut alors considérer le condensateur ainsi obtenu comme l'association de deux condensateurs $C_0^{'}$ et C_1. $C_0^{'}$ et C_1 sont-ils associés en série ou en parallèle ?

5.2. Déterminer l'expression de la capacité équivalente C_h en fonction de h, l, L, d, ε_0 et ε_r. Montrer que C_h s'écrit sous la forme : $C_h = \alpha + \beta h$. Calculer les valeurs numériques des constantes α et β sachant que C_h est exprimé en pF et h en m. On donne : $L = 1{,}00\ m$, $l = 4{,}31\ cm$, $d = 2{,}54\ mm$ et $e_r(F) = 80$.

6. Mesure du niveau d'un liquide dans un réservoir

On souhaite mesurer la hauteur h d'un liquide contenu dans un réservoir à l'aide du dispositif étudié ci-dessus. On insère alors le condensateur plan plongé dans le réservoir contenant un liquide dans le circuit de la figure 6.

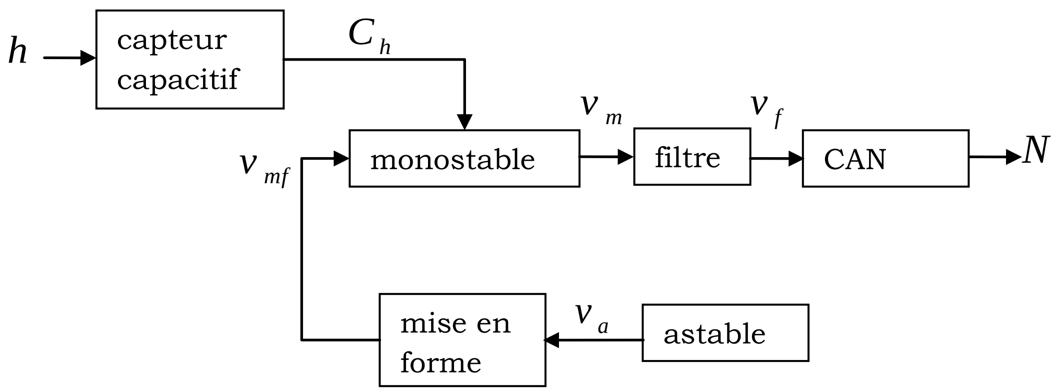

figure 6

6.1. Le signal v_a est délivré par le multivibrateur astable de la figure 7 où l'amplificateur opérationnel de tensions de saturation $\pm V_{sat}$ est considéré idéal.

6.1.1. Montrer que les seules tensions possibles en sortie sont $+V_{sat}$ ou $-V_{sat}$. Quelles sont les tensions v_+ correspondantes à l'entrée non inverseuse de l'AO ?

6.1.2. Etudier le fonctionnement de ce circuit et montrer qu'il est le siège d'oscillations dues à des charges et des décharges du condensateur.

On suppose qu'à la mise sous tension à $t=0$, le condensateur est chargé à $-\frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$ et $V_a=+V_{sat}$.

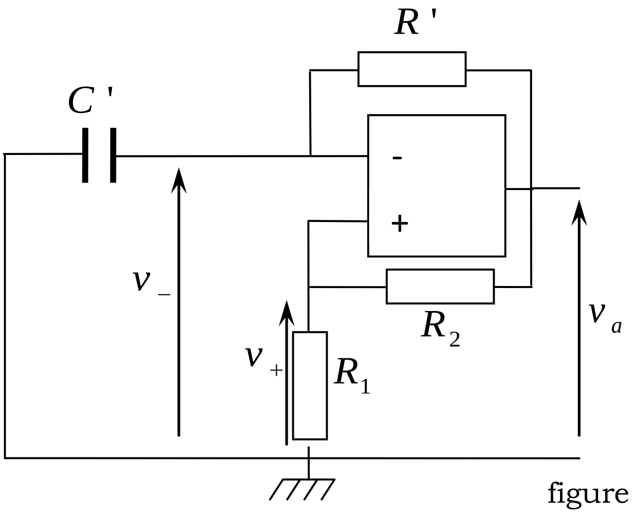

figure 7

6.1.3. Sur un chronogramme, dessiner l'évolution des tensions v_+, v_- et v_a sur deux périodes complètes.

6.1.4. On suppose qu'un régime périodique s'est établi. Calculer les temps de charge T_c et de décharge T_d du condensateur au cours d'une période. En déduire l'expression de la période T des oscillations de la tension v_a en fonction de R', C', R_1 et R_2.

6.2. Le signal v_a est appliqué à l'entrée du montage de mise en forme représenté dans la figure 8a. (D_z) est une diode zener dont la caractéristique est représentée dans la figure 7b. On donne : $U_D=-0{,}5\ V$ et $U_Z=5{,}1\ V$.

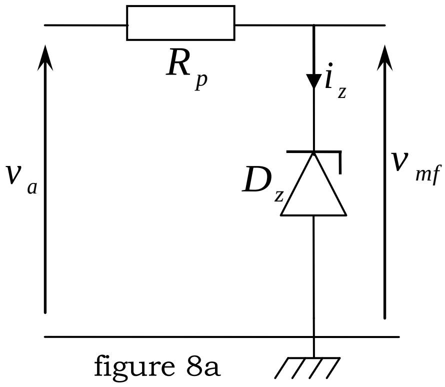

figure 8a

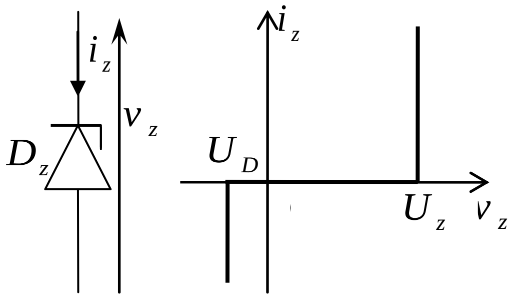

figure 8b

6.2.1. Représenter l'allure de la tension v_{mf} en fonction du temps.

6.2.2. Calculer la valeur minimale de R_p limitant l'intensité du courant i_z à $10\ mA$ lorsque v_a prend sa valeur minimale. Cette valeur est-elle toujours correcte lorsque v_a prend sa valeur maximale ? Justifier votre réponse.

6.3. Le monostable, alimenté par une tension continue $V_{CC} = 5\,V$, est un circuit électronique qui a un seul état stable (il correspond ici à l'état bas, sortie à $0\,V$) quand il est au repos. Il utilise le condensateur C_h, une résistance ajustable R_x et deux portes logiques ET-NON. Il est déclenché à chaque transition descendante du signal d'entrée v_{mf} de période $T = 2\,ms$ délivré par le circuit de mise en forme. Il passe alors à son état instable (ici à l'état haut, $+5\,V$), il y reste une durée $T_i = R_x C_h$ (durée de l'état instable) qui dépend de R_x et C_h, puis il revient à son état stable au bout de ce temps. Cette durée ne peut être inférieure à $T_0 = 10\,\mu s$.

6.3.1. Le réservoir est supposé vide. Calculer la valeur minimale $C_{h\min}$ de la capacité C_h. Déterminer la valeur minimale $R_{x\min}$ de R_x permettant un fonctionnement correct du monostable.

6.3.2. Le réservoir est supposé plein. Calculer la valeur maximale $C_{h\max}$ de la capacité C_h. Déterminer la valeur maximale $R_{x\max}$ de R_x permettant d'avoir $T_i < T$.

6.3.3. Représenter l'allure de la tension de sortie du monostable $v_m(t)$ pour une hauteur $h = 50\,cm$. On prendra $R_x = 82{,}3\,kW$.

6.3.4. Déterminer l'expression de la valeur moyenne V_{m0} de la tension de sortie $v_m(t)$ en fonction de R_x , C_0, α , T , V_{CC} et h. Commenter. Quelle est la plage de variation de V_{m0} pour $R_x = 82{,}3\,kW$?

6.4. Afin d'obtenir la composante continue de la tension $v_m(t)$, on applique cette tension au filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$. On réalise le filtre à l'aide d'une résistance $R_f = 220\,kW$ et d'un condensateur de capacité C_f.

6.4.1. Préciser, en le justifiant, la nature du filtre. Déterminer la fréquence de coupure théorique f_c à $-3\,dB$, et le comportement du circuit de part et d'autre de sa fréquence de coupure.

6.4.2. Le développement en série de Fourier de la tension $v_m(t)$ est $v_m(t) = V_{m_0} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(V_{m_n}.\sin(n\omega t + \varphi_{m_n})\right)$ où n est un entier et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Tracer le spectre de la tension $v_m(t)$.

6.4.3. Donner l'expression de la tension $v_f(t)$ à la sortie du filtre. A quelle condition sur f_c peut-on écrire $v_f(t) = V_{f_0} + V_{f_1}\sin(\omega t + \varphi_{f_1})$? Exprimer V_{f_0} et V_{f_1}.

6.4.4. La fréquence de coupure du filtre est $f_c = 0{,}5\,Hz$. Justifier le choix de cette valeur et calculer la valeur de C_f permettant d'obtenir cette fréquence.

6.4.5. On néglige toute tension dont l'amplitude est inférieure à $3\,mV$. Vérifier que l'on peut écrire $v_f(t) \approx V_{f_0}$.

6.5. Pour acquérir et traiter le signal v_f à l'aide d'un ordinateur il faut convertir le signal analogique obtenu à la sortie du filtre en signal numérique : on utilise alors un convertisseur analogique-numérique (CAN). On peut décomposer la conversion en deux étapes : l'échantillonnage et la numérisation. Dans la pratique, ces deux étapes se font simultanément.

6.5.1. Justifier que la tension acquise $v_f(t)$ à la sortie du filtre est un signal électrique analogique.

6.5.2. La tension analogique acquise v_f est échantillonnée avec une période d'échantillonnage T_e pendant une durée d'acquisition T_a. Expliquer brièvement le principe de l'échantillonnage d'un signal analogique et donner le nombre d'échantillons prélevés par seconde. Proposer un montage pratique simple réalisant l'échantillonnage.

6.5.3. Un ordinateur ne peut traiter que des signaux numériques. Définir ce qu'est un signal numérique et expliquer brièvement le principe de la numérisation. Quels sont les avantages de la numérisation ?

6.5.4. Pour numériser la tension v_f on dispose d'un CAN de 8 bits et de calibre (plage de tension convertible en numérique) $[V_{\min}, V_{\max}]$. On appelle N le mot binaire fourni en sortie du CAN. On admettra que la tension à l'entrée du CAN a pour expression $v_f = 0,031 + 2,438.h$, où v_f est exprimée en volt et h en mètre. On donne : $V_{\min} = 0\ V$ et $V_{\max} = 2,560\ V$.

6.5.4.1. Combien de valeurs possibles peut prendre un échantillon numérisé sur 8 bits ?

6.5.4.2. La résolution d'un CAN ou encore quantum est la plus petite variation de tension analogique que le CAN sera capable de repérer. On la définit par : $q = \dfrac{V_{\max} - V_{\min}}{2^{n_b} - 1}$, n_b étant le nombre de bits. Quelle est la résolution q du CAN utilisé ? En déduire la plus petite variation de hauteur du liquide mesurable par celui-ci. Quelles sont les valeurs minimale et maximale que pourra prendre N ?

6.5.4.3. On admet que l'incertitude globale Δh sur toute la chaîne de mesure est équivalente à 2,5 fois la valeur de la résolution du CAN. Calculer alors Δh.

6.5.4.4. Calculer la valeur du mot binaire N fourni en sortie du CAN et son incertitude ΔN pour une hauteur de liquide mesurée $h = 50\ cm$.