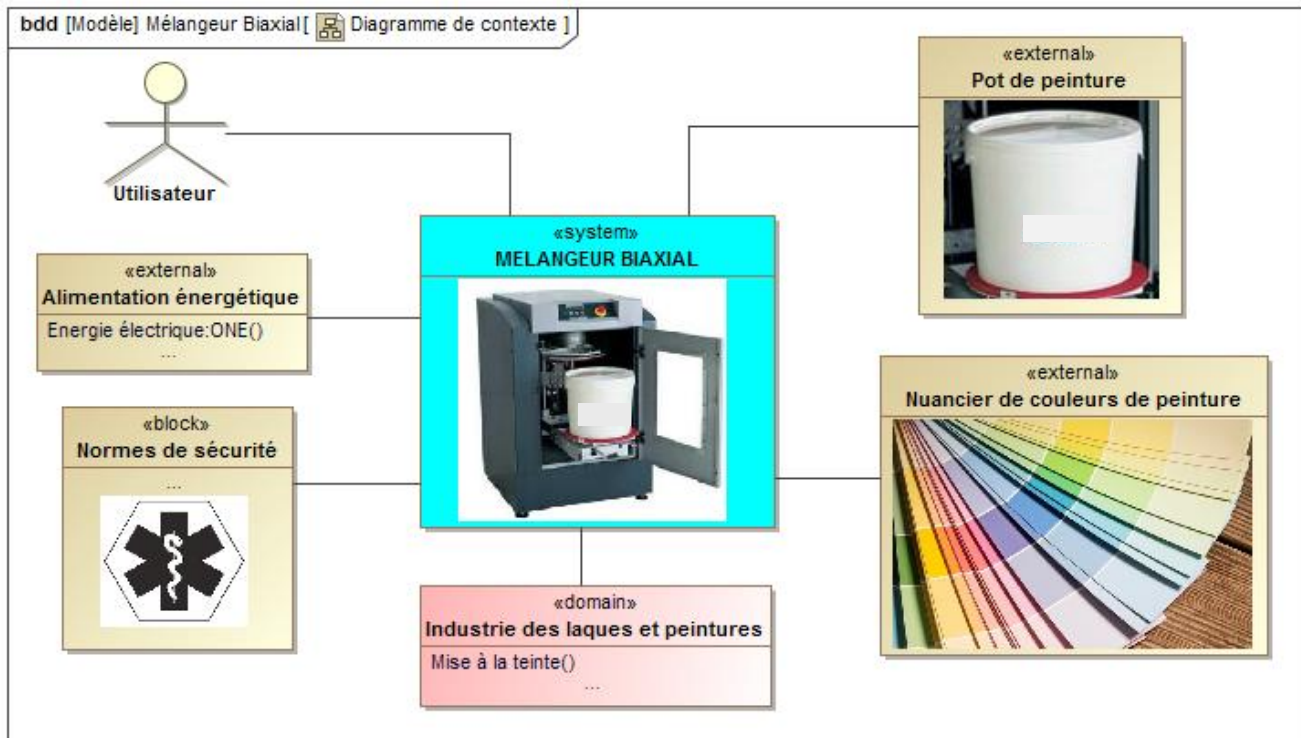


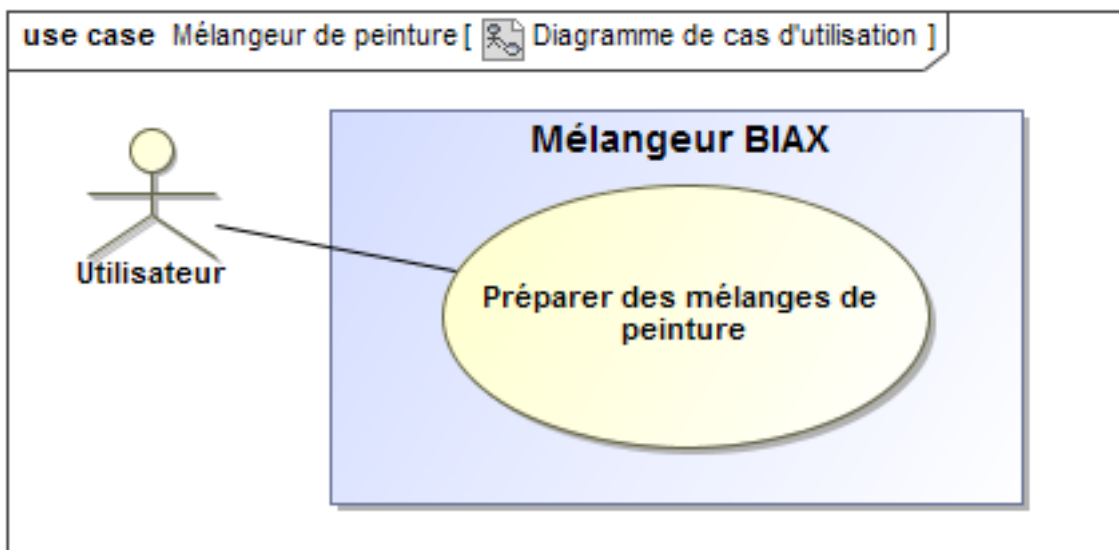
# MELANGEUR DE PEINTURE BI-AXIAL

Le mélangeur de peinture bi-axial « BIAx » est un malaxeur stationnaire pour des pots étanches, ronds, rectangulaires et ovales, en métal ou en plastique. Les peintures, colorants, laques bâtiment ou industrie ainsi que les crépis et autres matériaux à viscosité faible peuvent être mélangés... Le domaine d'utilisation s'étend du grossiste au détaillant, de l'industrie des laques et peintures jusqu'aux activités voisines. Le mélangeur est particulièrement indiqué en tant que composant d'un système de mise à la teinte. **(Figure 1)**



**Figure 1** : diagramme de contexte

On donne ci-dessous Le diagramme de cas d'utilisation :

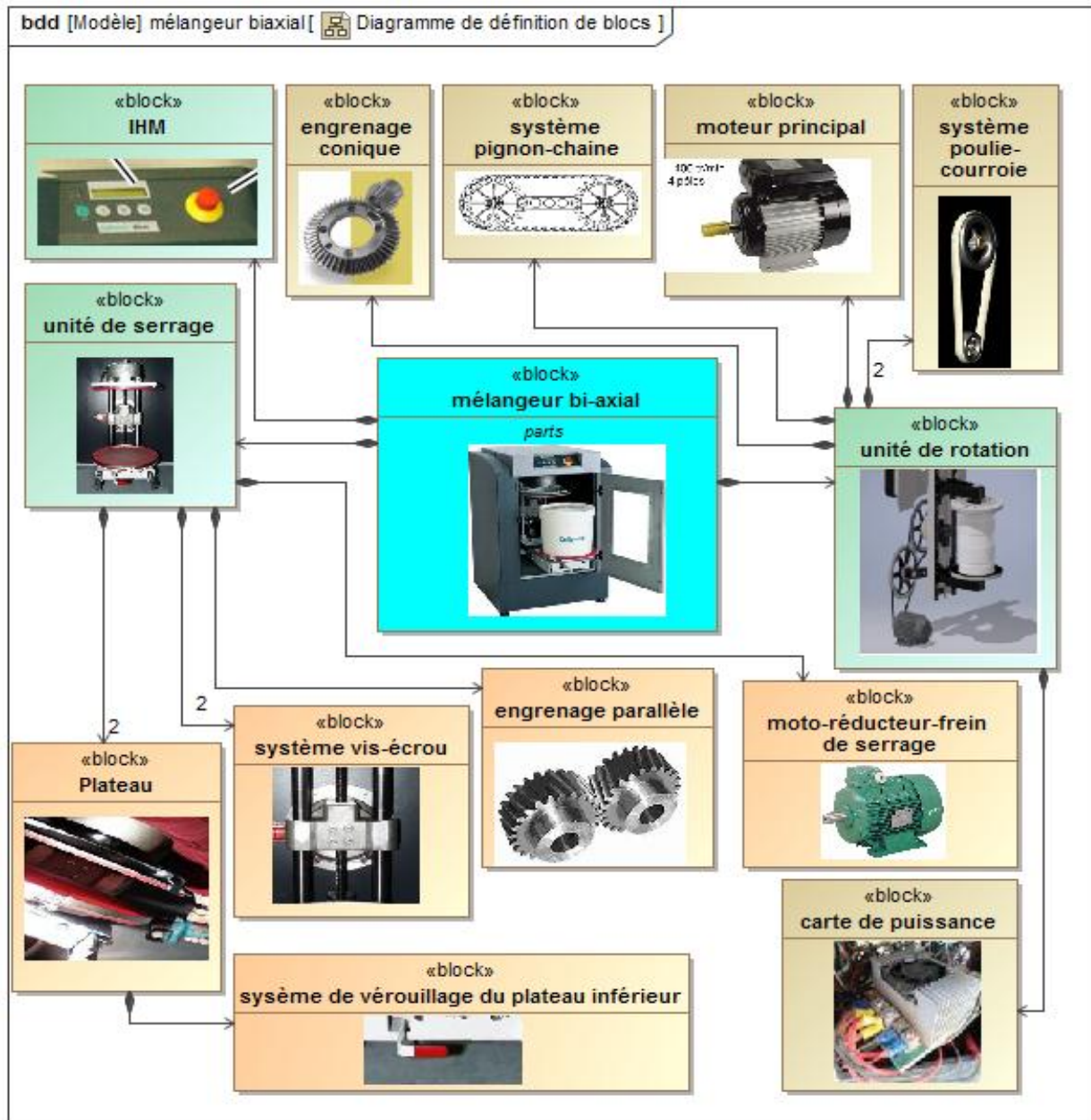


**Figure 2** : diagramme de cas d'utilisation

La machine est composée de deux unités essentielles :

- **Unité de rotation** : son rôle est d'animer en rotation le pot suivant les axes longitudinal et transversal.
- **Unité de serrage** : son rôle est la mise et le maintien en position du pot.

On donne ci-après sur la **figure 3**, le diagramme de définition de blocs regroupant les constituants des deux unités.



**Figure 3** : diagramme de définition de blocs

- Le pot est positionné avec son anse et centré sur le plateau inférieur. L'anse du pot doit être positionnée vers l'arrière et fixée avec un élastique ou du ruban adhésif. (**Figure 4**)
- Le pot serré est mis en rotation simultanément sur deux axes perpendiculaires, à deux vitesses différentes adaptées à chaque type de matériaux (**figure 5**).
- Le temps de mélange nécessaire et l'aptitude du pot au mélange seront déterminés préalablement par des tests.



Figure 4

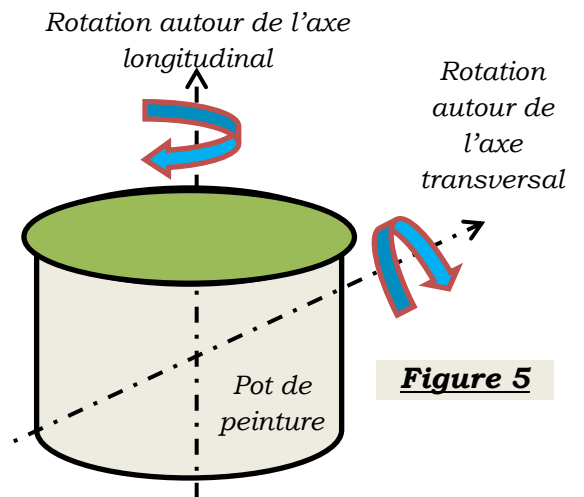


Figure 5

La figure 6 donne le diagramme des exigences du mélangeur :

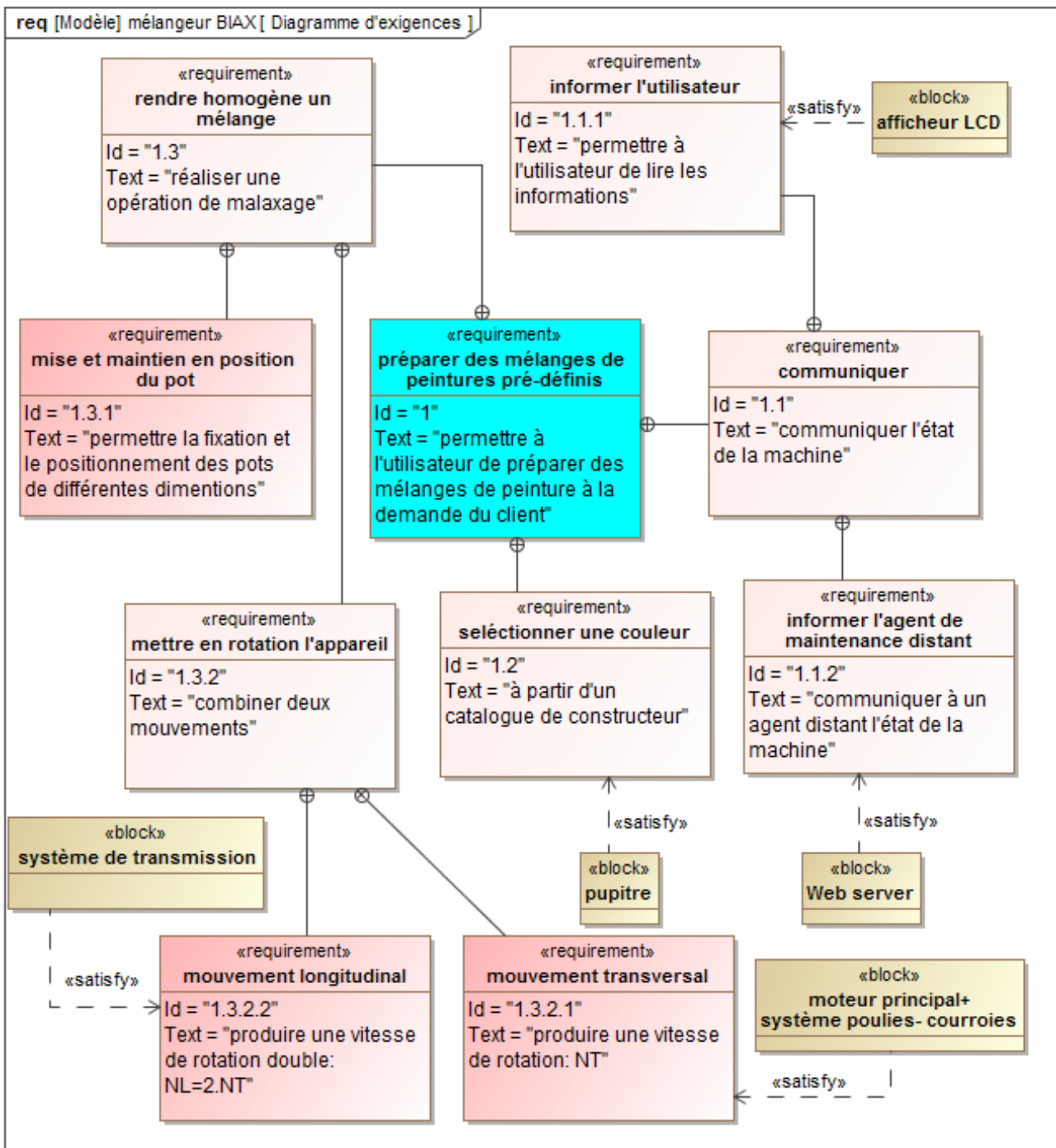


Figure 6 : diagramme d'exigences

**Partie I : Partie préliminaire notée : 4 points sur 20.****Etude mécanique de l'unité de serrage**

Le serrage du pot est assuré par un mécanisme composé d'un moteur et d'un système vis écrou permettant le déplacement simultané des deux plateaux suivant deux sens opposés (**annexe1**). L'utilisation de deux liaisons hélicoïdales a pour objectif d'augmenter l'effort de serrage afin d'empêcher le glissement ou le pivotement du pot.

Le moteur de serrage est un moto-réducteur composé d'un moteur à courant continu, délivrant un couple moteur  $C_{ms}$  et une vitesse angulaire  $\omega_{ms}$  et équipé d'un frein agissant sur le rotor, suivi d'un réducteur de rapport de réduction  $r$  ( $r=0,2$ ). Le mouvement est par la suite transmis aux plateaux supérieur et inférieur par l'intermédiaire d'un engrenage parallèle, de rapport de transmission  $k=-1$ , non représenté sur la **figure 7** et deux systèmes vis-écrou de pas  $p$  ( $p=5$  mm).

**Q1.** A partir de la description ci-dessus, du diagramme de contexte (**figure 1**), et du diagramme BDD (**figure 3**), Compléter, sur le document réponses **DR1**, le diagramme correspondant à la chaîne d'énergie de l'unité de serrage.

Le schéma cinématique simplifié de l'unité de serrage est représenté sur la **figure 7**.

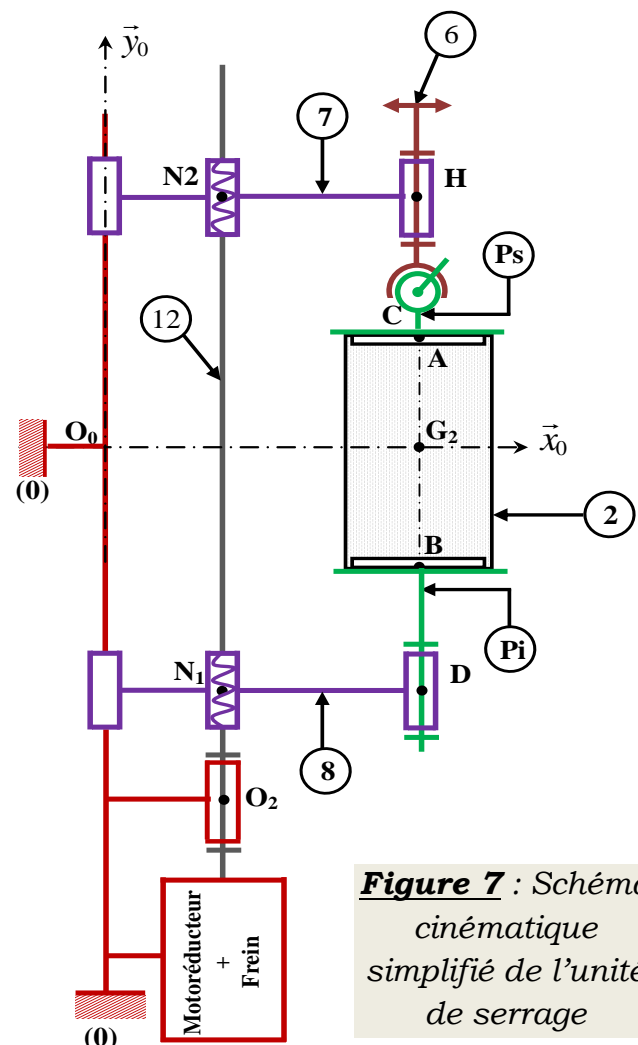
Le mécanisme est constitué des éléments suivants :

- Colonne de guidage liée au bâti 0 :  
Le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- Vis 12 : en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{y}_0)$  avec la colonne (0).
- Ensemble supérieur  $ES=\{6,7,Ps\}$  (Aucun mouvement relatif entre les solides de l'ensemble ES) : en liaison glissière de direction  $\vec{y}_0$  avec la colonne (0) et en liaison hélicoïdale, à droite et de pas  $p$  d'axe  $(N_2, \vec{y}_0)$  avec la vis (12).
- Ensemble inférieur  $Ei=\{8, Pi\}$  (Aucun mouvement relatif entre les solides de l'ensemble Ei) : en liaison glissière de direction  $\vec{y}_0$  avec la colonne (0) et en liaison hélicoïdale, à gauche et de pas  $p$ , d'axe  $(N_1, \vec{y}_0)$  avec la vis (12).

On donne :

$$\begin{aligned} \bullet \vec{\Omega}(12/0) &= \omega_{12} \cdot \vec{y}_0 & \bullet \vec{O}_0 N_2 &= d \cdot \vec{x}_0 + y(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \bullet \vec{O}_0 N_1 &= d \cdot \vec{x}_0 - y(t) \cdot \vec{y}_0 & \bullet \vec{O}_0 O_2 &= d \cdot \vec{x}_0 - b \cdot \vec{y}_0 \end{aligned}$$

Les deux liaisons hélicoïdales ont le même pas :  $p=5$ mm.



Etude cinématique :

**Q2.** Ecrire au point  $O_2$  le torseur cinématique  $\{\mathcal{G}(12/0)\}_{O_2}$ , puis au point  $N_1$  les torseurs cinématiques suivants :  $\{\mathcal{G}(12/0)\}_{N_1}$  et  $\{\mathcal{G}(Ei/0)\}_{N_1}$ .

**Q3.** En déduire, au point  $N_1$ , le torseur cinématique  $\{\mathcal{G}(Ei/12)\}_{N_1}$  en fonction de  $\omega_{12}$  et  $p$  puis en fonction de  $\omega_{ms}$ ,  $r$  et  $p$ .

**Q4.** En déduire, au point  $N_2$ , le torseur cinématique  $\{\mathcal{G}(Es/12)\}_{N_2}$  en fonction de  $\omega_{ms}$ ,  $r$  et  $p$ .

**Q5.** En déduire les expressions algébriques des vitesses de translation  $v_{Es}$  et  $v_{Ei}$  des ensemble  $Es$  et  $Ei$  en fonction de  $\omega_{ms}$ ,  $r$  et  $p$ .

Etude statique : Calcul du couple de freinage pour maintenir le pot.

Le pot de peinture (2) est de masse  $M$  et de centre d'inertie  $G_2$ , les autres solides seront considérés de masses négligeables.

On donne  **$M=40\text{kg}$**  (masse maximale supportée par la machine).

Modélisation des actions mécaniques :

- ✓ Les actions mécaniques entre le plateau supérieur ( $P_s$ ) et le pot de peinture (2)

seront modélisées par le torseur suivant  $\{\tau_{(2 \rightarrow P_s)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_s \\ \vec{M}_s \end{Bmatrix}_A$ , avec  $\vec{R}_s \cdot \vec{y}_0 = N_s$ , tel que :

**$N_s=450\text{N}$ .**

- ✓ Les actions mécaniques entre le plateau inférieur ( $P_i$ ) et le pot de peinture (2)

seront modélisées par le torseur suivant  $\{\tau_{(P_i \rightarrow 2)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_i \\ \vec{M}_i \end{Bmatrix}_B$ , avec  $\vec{R}_i \cdot \vec{y}_0 = N_i > 0$ .

- ✓ L'action mécanique du **frein** sur la vis (**12**) est représentée par le torseur suivant

$\{\tau_{(frein \rightarrow 12)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_{O_2(frein \rightarrow 12)} = -C_f \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_{O_2}$ . Avec  $C_f$  : couple de freinage associé au

motoréducteur. Le dispositif de freinage permet un couple maxi de  **$300\text{Nmm}$  sur l'axe moteur.**

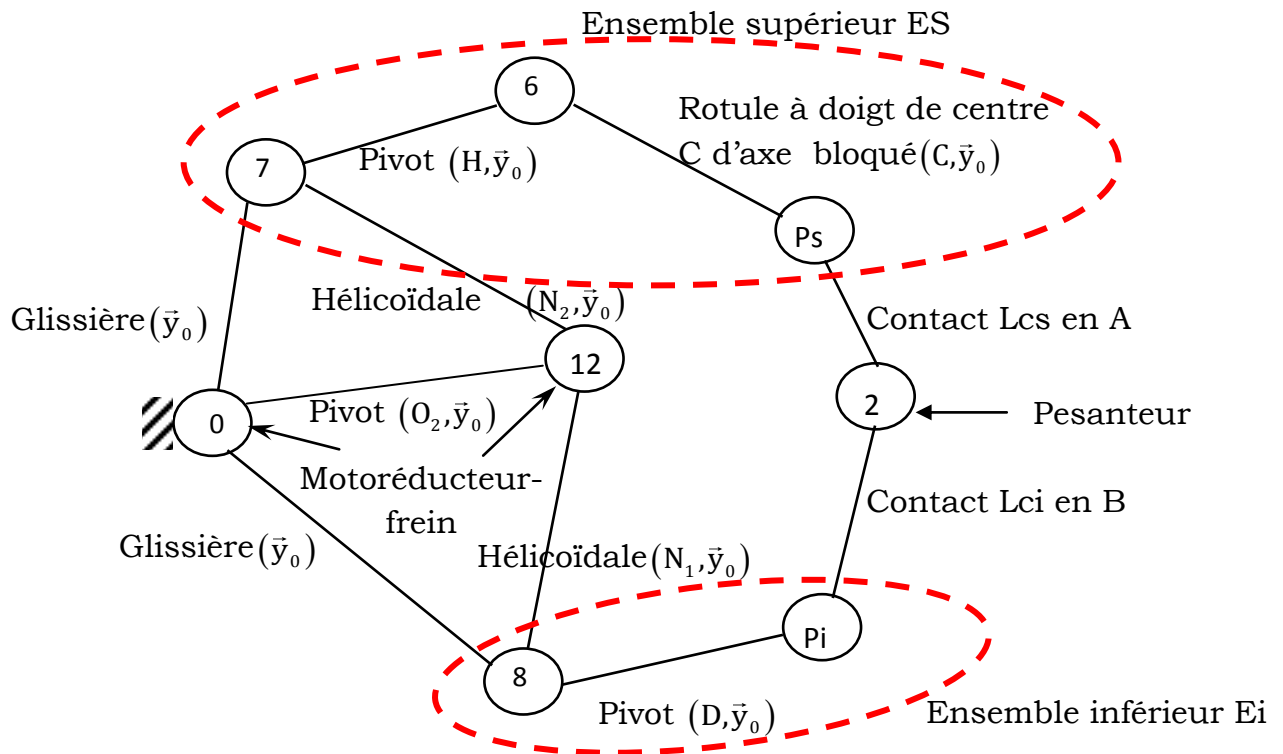
- ✓ L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$ , avec  $g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

**Notation préconisée :** On utilisera l'écriture suivante pour les torseurs des actions mécaniques transmissibles du solide  $i$  au solide  $j$  :

$$\{\tau(i \rightarrow j)\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



## Graphe d'analyse des actions mécaniques :



Remarque : Le contact  $Lc_j$  est contact linéique circulaire entre 2 et  $P_j$ , avec  $j = \{i, s\}$ .

**Q6.** Donner la forme des torseurs des actions mécaniques des liaisons indiquées dans le tableau du document réponses **DR2**.

**Q7.** Déterminer l'équation scalaire issue de l'application du théorème de la résultante statique à l'ensemble  $Es$  ( $7+6+Ps$ ) en projection sur  $\vec{y}_0$ . Déduire l'équation scalaire issue de l'application du théorème de la résultante statique à l'ensemble  $Ei$  ( $8+Pi$ ) en projection sur  $\vec{y}_0$ .

**Q8.** Isoler le pot (2), puis déterminer l'expression de l'effort  $N_i$  en fonction de  $M$ ,  $g$  et  $N_s$ .

**Q9.** En appliquant le théorème du moment statique à la vis (12) en  $O_2$  en projection sur  $\vec{y}_0$ , déterminer l'expression du couple de freinage  $C_f$  en fonction de  $p$ ,  $M$ ,  $g$  et  $N_s$ .

**Q10.** Faire l'application numérique. Le maintien du freinage est-il assuré ?

### Chaîne d'énergie de l'unité de rotation

- La rotation autour de l'axe transversal est assurée par un moteur asservi en vitesse entraînant le moyeu principal via un réducteur poulies-courroies.
- La rotation autour de l'axe longitudinal provient d'un engrenage conique épicycloïdal et d'un système pignon-chaîne.

**Q11.** A partir du diagramme de contexte (**figure 1**) et du diagramme BDD (**figure 3**) ; Compléter, sur document réponses **DR2**, le diagramme correspondant à la chaîne d'énergie de l'unité de rotation.

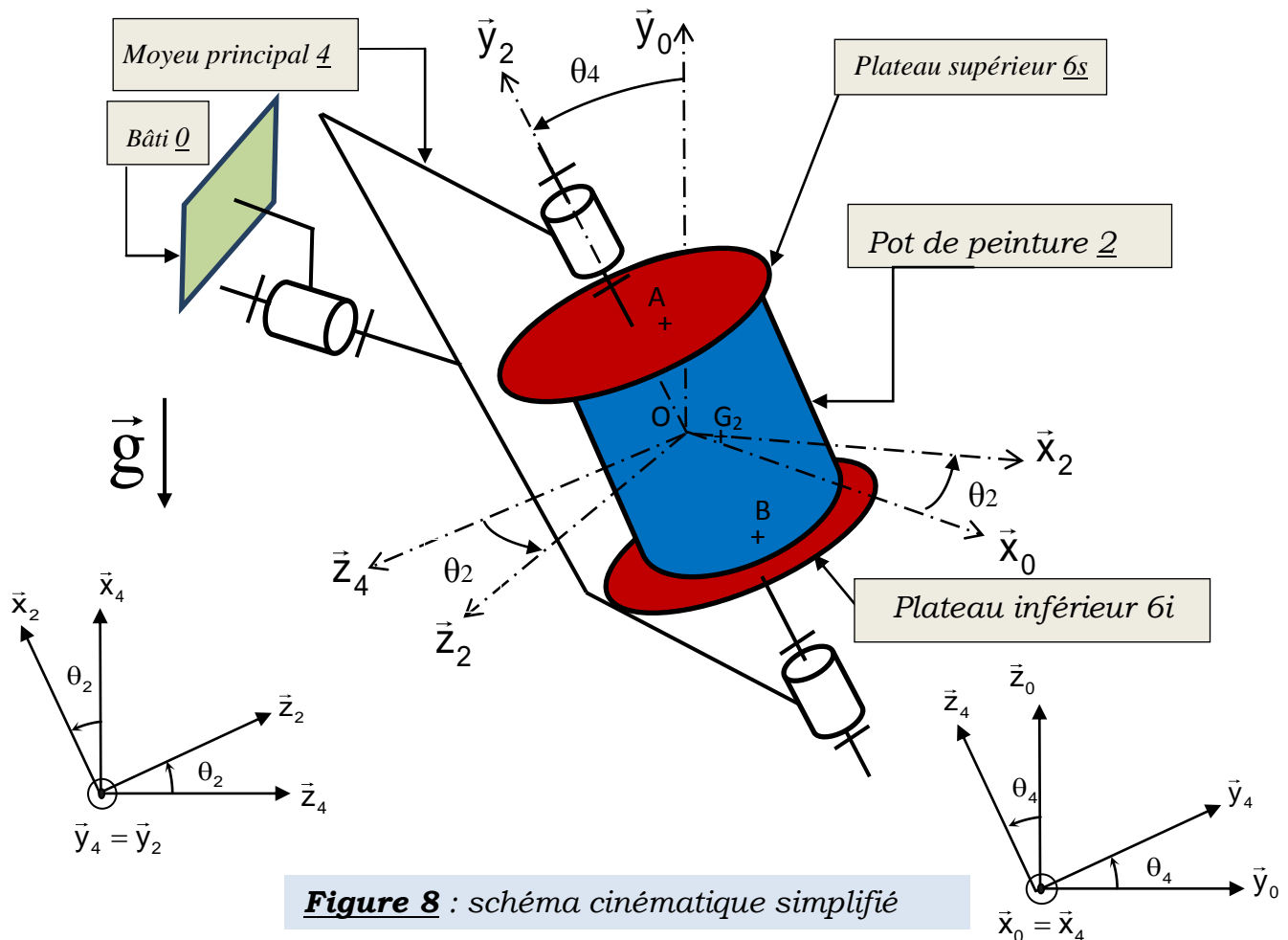
**Fin de la partie préliminaire**

## Partie II: Etude cinématique et dynamique de l'unité de rotation

Objectif : dimensionner le moteur principal

Données et hypothèses :

On adopte une modélisation simplifiée du mélangeur faisant montrer la rotation du pot sur lui-même autour de deux axes perpendiculaires.



**Figure 8** : schéma cinématique simplifié

- ✓ Le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti (0) et supposé galiléen.
- ✓ Le moyeu principal (4) de masse  $m_4$  est en liaison pivot parfaite d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec le bâti. Le repère  $R_4(O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  est lié à (4), avec  $\theta_4 = (\vec{y}_0, \vec{y}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$  ; son centre d'inertie est situé sur l'axe de rotation  $(O, \vec{x}_4)$ .
- ✓ La matrice d'inertie du moyeu principal (4) en O, dans la base  $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  est défini

$$\text{par : } \bar{I}_O(4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)} .$$

- ✓ L'ensemble (pot + 2 plateaux) est en liaison pivot parfaite d'axe  $(O, \vec{y}_4)$  avec le moyeu principal (4). Le repère  $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à cet ensemble, avec  $\theta_2 = (\vec{z}_4, \vec{z}_2) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2)$ .

- ✓ On considère le pot(2), de masse M, excentré sur les plateaux, et  $G_2$  son centre d'inertie tel que  $\overline{OG_2} = a.\vec{x}_2$ .
- ✓ Le pot (2) sera considéré comme un cylindre d'axe de révolution  $(G_2, \vec{y}_2)$ , de matrice d'inertie en  $G_2$ , dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est défini par  $\overline{I}_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$ .
- ✓ Les plateaux (6s) et (6i) seront considérés comme des solides de masse et d'inertie négligeables.
- ✓ Le couple appliqué par la motorisation sur le moyeu principal (4) du mélangeur est noté  $\vec{C}_{m4} = C_{m4}.\vec{x}_0$ .
- ✓ L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g.\vec{y}_0$ .

**Q12.** Ecrire au point O les torseurs cinématiques suivants  $\{\mathcal{G}(2/4)\}_O$ ,  $\{\mathcal{G}(4/0)\}_O$  et  $\{\mathcal{G}(2/0)\}_O$ .

**Q13.** Déterminer la matrice d'inertie du pot (2) en O dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

Pour la suite on considérera que la matrice d'inertie du pot (2) est de la forme

$$\overline{I}_O(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

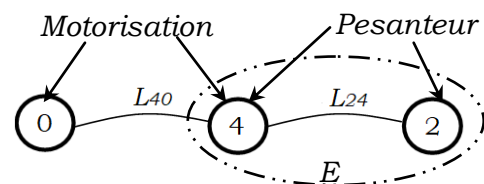
**Q14.** Déterminer le moment cinétique, au point O, du pot (2) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  :  $\vec{\sigma}(O, 2/R_0)$ .

**Q15.** Déterminer la projection sur  $\vec{x}_0$  du moment dynamique, au point O, du pot (2) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  :  $\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(O, 2/R_0)$ .

**Q16.** Donner la projection sur  $\vec{x}_0$  du moment dynamique, au point O, du moyeu (4) dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$  :  $\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(O, 4/R_0)$ .

On note  $\mathbf{E}$  l'ensemble en mouvement/ $R_0$  :  $\mathbf{E} = \{4+2\}$ .

Graphe d'analyse :

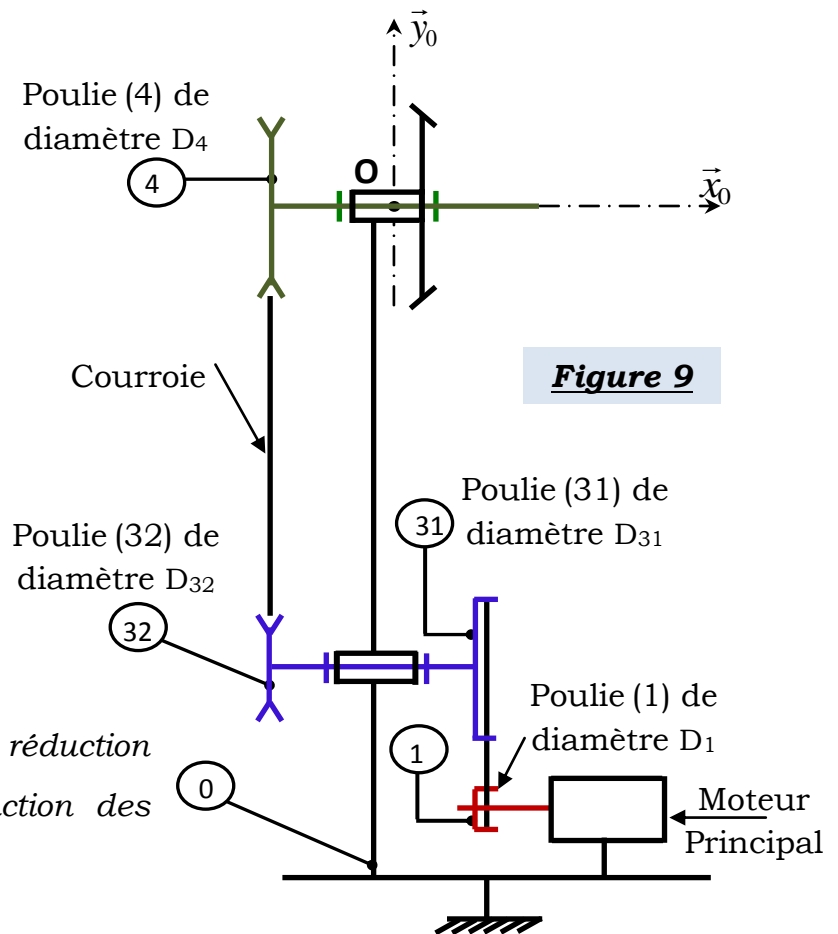


**Q17.** Déterminer, par application du théorème du moment dynamique à l'ensemble  $\mathbf{E}$  au point O en projection sur  $\vec{x}_0$ , l'expression du couple  $C_{m4}$  en fonction de  $\theta_2$ ,  $\theta_4$ , leurs dérivées et des données.



### Etude de la chaîne de transmission

La rotation autour de l'axe transversal est assurée par un moteur asservi en vitesse entraînant le moyeu principal via un réducteur poulies-courroies.



**Q18.** Donner les rapports de réduction

$r_1 = \frac{\omega_{31/0}}{\omega_{1/0}}$  et  $r_2 = \frac{\omega_{4/0}}{\omega_{32/0}}$  en fonction des diamètres.

#### Données et hypothèses :

- ✓ Le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti (0) et supposé Galiléen.
- ✓ Les trois solides (1), (3)={ (31) U (32) } et (4) sont en liaisons pivots avec le bâti.
- ✓ L'action mécanique du moteur sur (1) est modélisée par un torseur couple de moment :  $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{x}_0$ .
- ✓ L'action mécanique du récepteur sur (4) est modélisée par un torseur couple de moment :  $\vec{C}_{m4} = -C_{m4} \cdot \vec{x}_0$ .
- ✓ Les solides tournants sont équilibrés dynamiquement.
- ✓ Les courroies sont supposées inextensibles et de masses négligeables.
- ✓ Les liaisons sont parfaites et pas de glissement dans le système poulies - courroies.

#### Caractéristiques d'inertie :

- ✓  $J_1$  : le moment d'inertie de l'ensemble {arbre moteur, poulie 1} par rapport à son axe de rotation de vitesse angulaire  $\omega_1 = \omega_m$ .
- ✓  $J_3$  : le moment d'inertie de l'ensemble {axe 3, poulie 31, poulie 32} par rapport à son axe de rotation de vitesse angulaire  $\omega_3$ .
- ✓  $J_4$  : le moment d'inertie de l'ensemble {axe 4, poulie 4} par rapport à son axe de rotation de vitesse angulaire  $\omega_4$ .

**Q19.** Déterminer l'énergie cinétique par rapport à  $R_0$  de l'ensemble  $\Sigma = \{1,3,4\}$ .  
En déduire le moment d'inertie équivalent  $J_{\text{éq}}$  ramené sur l'arbre moteur en fonction de  $J_1, J_3, J_4, r_1$  et  $r_2$ .

**Q20.** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer une expression littérale du couple moteur  $C_m$  en fonction de  $C_{m4}, J_{\text{éq}}, \dot{\omega}_m, r_1$  et  $r_2$ . En déduire l'expression du couple résistant ramené sur l'arbre moteur :  $C_r$ , tel que :

$$C_m(t) - C_r(t) = J_{\text{éq}} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} \quad (1).$$

La rotation autour de l'axe longitudinal provient d'un engrenage conique épicycloïdal et d'un système pignon- chaîne.

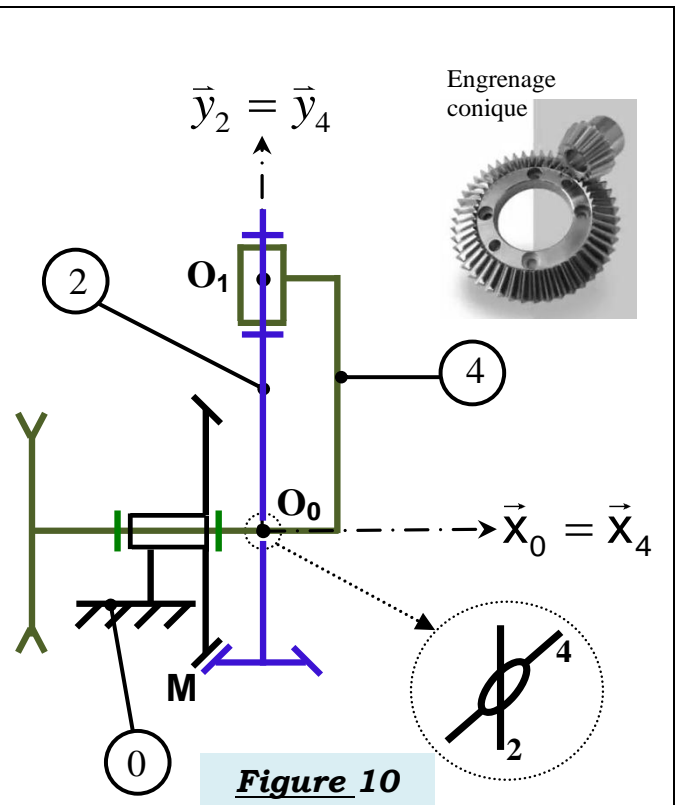
Pour que le mélange soit fait en un temps minimum avec un minimum d'énergie, l'expérience montre que la vitesse de rotation ( $N_L$ ) autour de l'axe longitudinal doit être le double de la vitesse de rotation ( $N_T$ ) autour de l'axe transversal.

Pour illustrer le mouvement bi-axial, on donne sur la **figure 10**, un schéma cinématique partiel.

On considère le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au bâti (0). Le repère  $R_4(O_0, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  est lié au moyeu (4), On donne :  $\theta_4 = (\vec{y}_0, \vec{y}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$ .

le repère  $R_2(O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à l'arbre (2), on donne :  $\theta_2 = (\vec{z}_4, \vec{z}_2) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2)$ .

Le point  $O_0$  est l'intersection des axes de la liaison 4/0 pivot d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  et de la liaison 2/4 pivot d'axe  $(O_1, \vec{y}_4)$ .



Le contact entre le pignon conique lié au solide (2) et la roue conique fixée au bâti (0) est supposé ponctuel au point M.

Données géométriques :  $\vec{MO}_0 = R_2\vec{x}_0 + R_0\vec{y}_2$ , avec :  $R_0 = 2R_2$ .

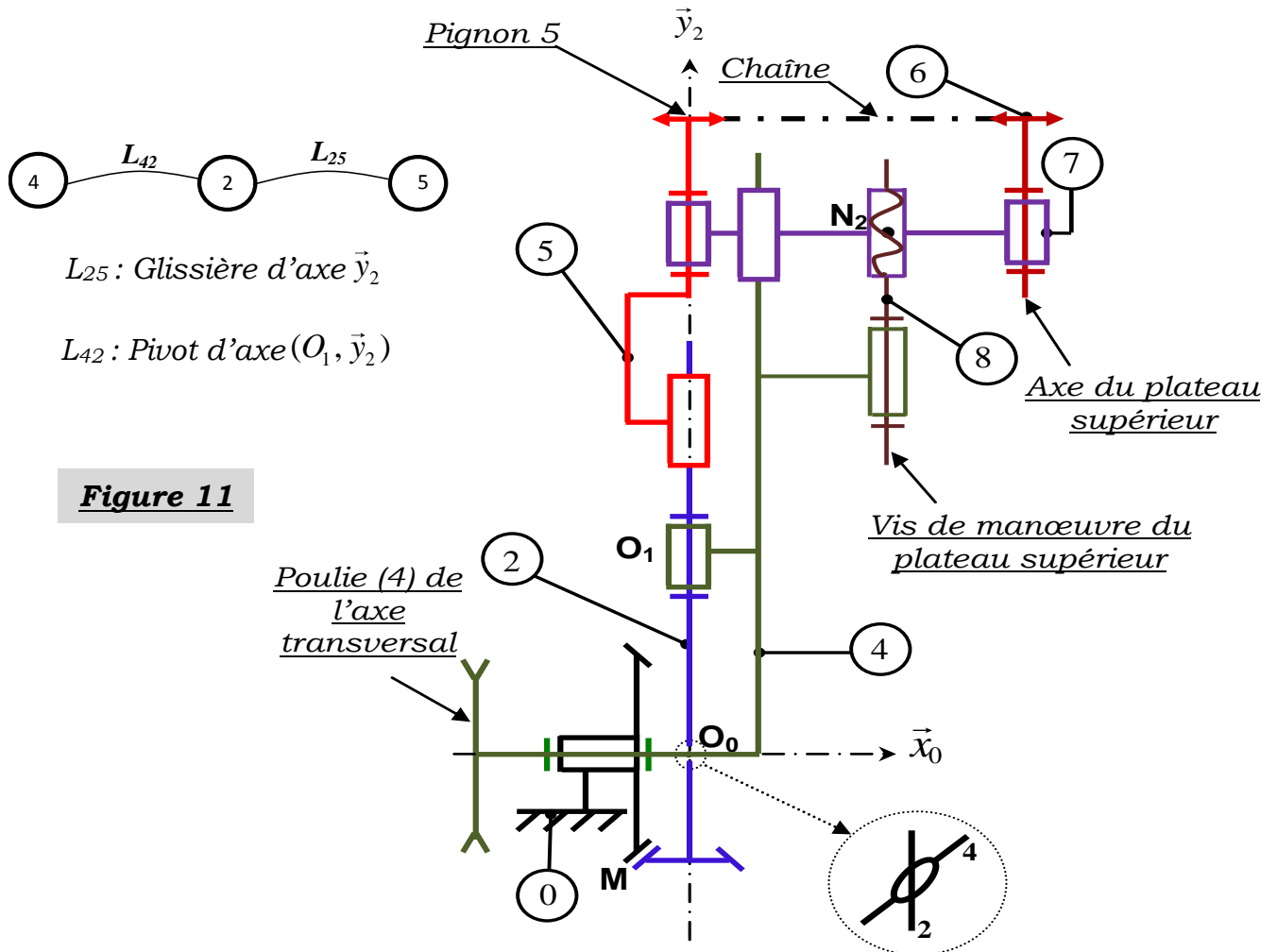
$R_0$  et  $R_2$  sont respectivement les rayons primitifs des pignons (0) et (2).

On suppose qu'il y a roulement sans glissement au point M entre les deux pignons (0) et (2).

**Q21.** Donner l'expression du torseur cinématique au point  $O_0$  du mouvement de (2) par rapport à (0) :  $\{\mathcal{G}(2/0)\}_{O_0}$ .

**Q22.** Déterminer, en utilisant la condition de roulement sans glissement en M,  $\dot{\theta}_2$  en fonction de  $\dot{\theta}_4$ .

On donne sur la **figure 11**, le schéma cinématique partiel (extrait du schéma global) qui modélise la transmission du mouvement entre l'axe d'entrée du mouvement longitudinal (4) et l'axe commun des deux plateaux supérieur et inférieur.



Le système de transmission est constitué d'une chaîne en série composée du moyeu (4), de l'arbre (2) et du solide intermédiaire (5).

La transmission du mouvement de rotation entre l'axe de l'arbre (2) et l'axe du pignon (6) est réalisée par un système pignons-chaîne.

Les deux pignons (5) et (6) ont les mêmes rayons primitifs :  $R_5 = R_6$ .

Le serrage du pot est assuré par un système vis écrou permettant le déplacement simultané des deux plateaux suivant deux sens opposés.

L'utilisation de deux liaisons hélicoïdales a pour objectif d'augmenter l'effort de serrage afin d'empêcher le glissement ou le pivotement du pot (Voir **annexe 1**).

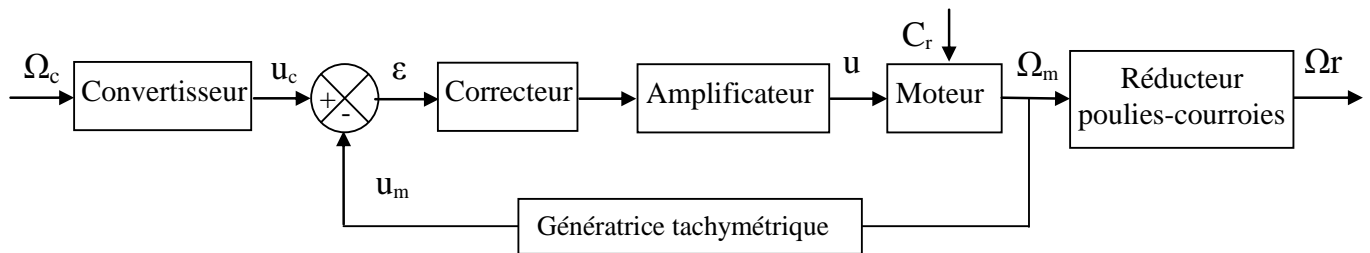
**Q23.** Justifier, en exploitant les schémas cinématiques de la **figure 11** et de **l'annexe 1**, l'intérêt de la liaison glissière entre 5 et 2. En déduire la vitesse de rotation  $\vec{\Omega}_{5/0}$ .

**Q24.** Donner le rapport des vitesses  $\frac{\omega_{6/0}}{\omega_{2/0}}$ , puis déduire la relation entre la vitesse de rotation autour de l'axe longitudinal  $\omega_{6/0}$  et celle autour de l'axe transversal  $\omega_{4/0}$ . Conclure vis-à-vis de l'exigence « Id : 1.3.2.2 ».

**Partie III: Etude de l'asservissement en vitesse du mouvement autour de l'axe transversal**

*Objectif : Modéliser la chaîne d'asservissement en vitesse du moteur et déterminer les paramètres du correcteur permettant de respecter l'exigence identifiée 1.3.2.1.1.1.*

L'asservissement en vitesse du mélangeur est représenté par le schéma bloc suivant :



$\Omega_c$  : consigne de vitesse ;  $\Omega_m$  : vitesse de rotation du moteur ;  
 $\Omega_r$  : vitesse de rotation / à l'axe transversal.

Modélisation du moteur électrique à courant continu :

On donne les équations suivantes caractérisant le moteur :

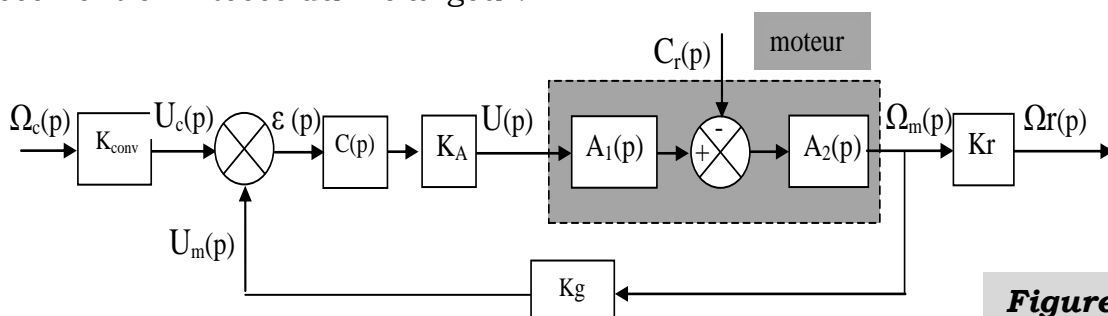
(2) : $u(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + e(t)$	$R$ : résistance de l'induit $L$ : inductance de l'induit	$e(t)$ : force contre électromotrice
(3) : $Cm(t) = k_i.i(t)$	$u(t)$ : tension d'alimentation du moteur	$k_e$ : constante de force contre électromotrice
(4) : $e(t) = k_e.\Omega_m(t)$	$i(t)$ : courant moteur	$k_i$ : constante de couple

On rappelle l'équation mécanique de la question **Q20** :  $Cm(t) - Cr(t) = J_{\text{eq}}.\frac{d\omega_m(t)}{dt}$  (1).

On notera  $U(p)$ ,  $I(p)$ ,  $E(p)$ ,  $Cm(p)$  et  $\Omega_m(p)$  les transformées de Laplace des différentes grandeurs physiques définies ci-dessus :

**Q25.** En considérant que toutes les conditions initiales sont nulles, donner les quatre équations précédentes dans le domaine de Laplace, puis compléter le schéma bloc du document réponses **DR3**.

La **figure 12** représente le schéma-bloc fonctionnel associé à la modélisation de l'asservissement en vitesse du mélangeur.



**Figure 12**

Blocs	Fonctions de transfert
Convertisseur	$K_{conv}$ (à déterminer)
Correcteur	$C(p)$ (à déterminer)
Amplificateur	$K_A = 5$ (sans unité)
Génératrice tachymétrique	$K_g = 2 \cdot 10^{-3}$ V/(rad/s)
Réducteur (poules courroies)	$K_r = 0,2$

$$A_1(p) = \frac{K_1}{(1+\tau \cdot p)}$$

$$A_2(p) = \frac{K_2(1+\tau \cdot p)}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

La **figure 13** donne le diagramme partiel de l'exigence : « Mettre en rotation l'appareil ».

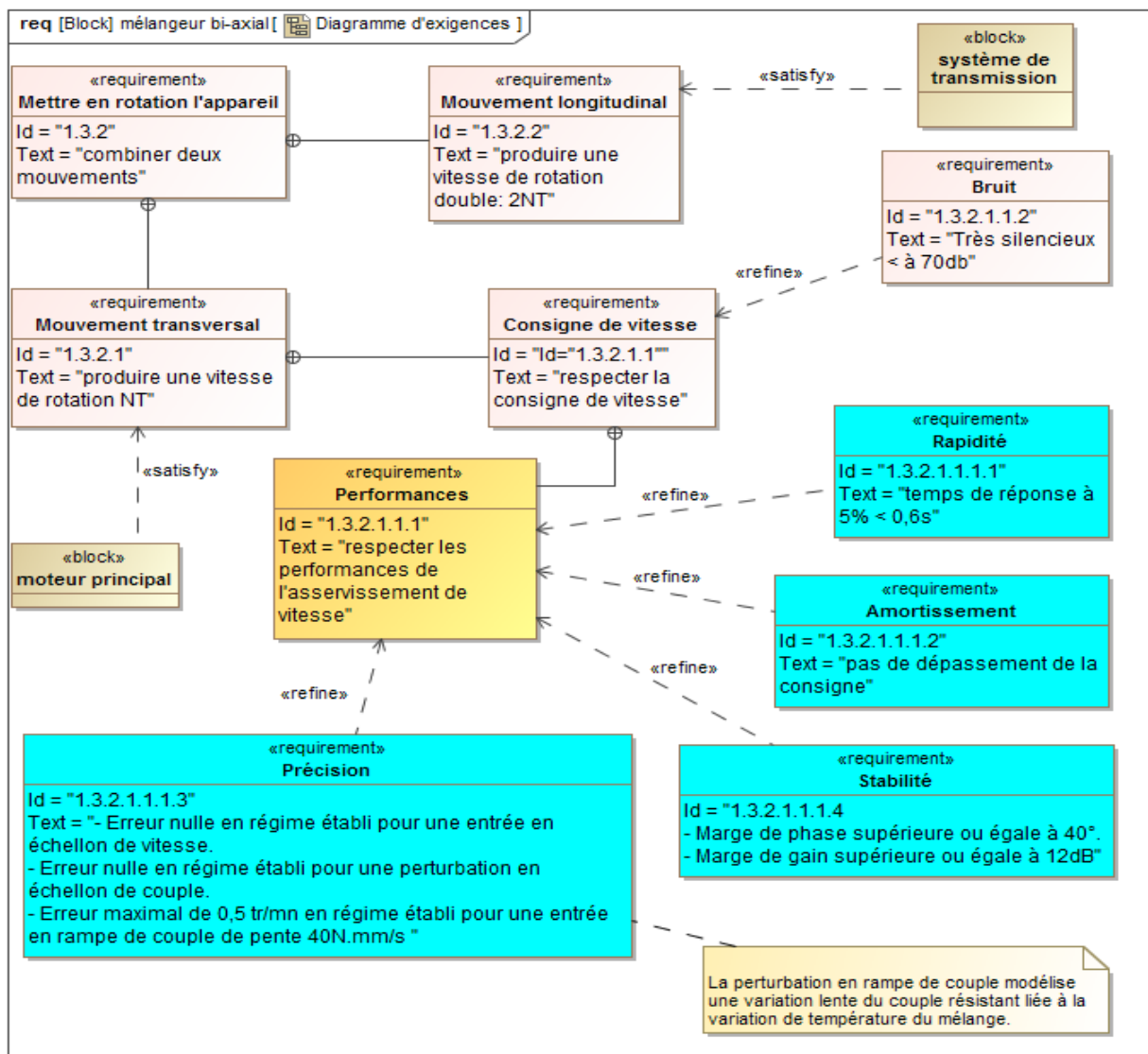


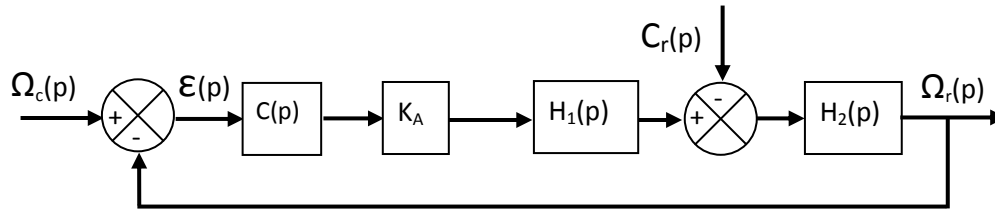
Figure 13 : Diagramme partiel de l'exigence : « id 1.3.2 »

**Q26.** Déterminer les fonctions de transfert  $A_1(p)$  et  $A_2(p)$ . En déduire les expressions des gains statiques  $K_1$  et  $K_2$ , de la constante du temps  $\tau$ , du facteur d'amortissement  $\xi$  et de la pulsation propre  $\omega_n$ .

**Q27.** Quelle doit être la fonction de transfert  $K_{conv}$  du convertisseur de consigne si l'on veut que l'écart  $\varepsilon$  soit nul, quand la vitesse  $\omega_r$  est égale à la vitesse de consigne  $\omega_c$ , en régime permanent ?



Le schéma bloc de l'asservissement peut se mettre sous la forme suivante :



**Q28.** Déterminer les expressions des fonctions de transferts :  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$ .

La fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé ( $C(p) = 1$ ) est notée :  $H_{BONC}(p)$ , son diagramme de Bode est donné sur le document réponse **DR3**.

**Q29.** Tracer les asymptotes, puis identifier les paramètres de la FTBO non corrigée ; Justifier votre réponse.

**Q30.** Représenter graphiquement les marges de stabilité, puis donner leurs valeurs. Conclure sur l'exigence de stabilité (répondre sur **DR3**).

Pour la suite on prend :  $H_1(p) = \frac{0,254}{(1+2.10^{-3}p)}$  ;  $H_2(p) = \frac{(1+2.10^{-3}p)}{(1+0,02\sqrt{2}.p+4.10^{-4}p^2)}$ .

Les valeurs numériques sont dans les unités du système international.

Dans le cas où  $C(p)=1$  et  $C_r(p)=0$ , la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit sous la forme :

$$H_{BF}(p) = \frac{\Omega_r(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2 \cdot \xi_{BF}}{\omega_{nBF}} p + \frac{1}{\omega_{nBF}^2} p^2}$$

**Q31.** Déterminer les valeurs numériques des paramètres canoniques de la fonction de transfert en boucle fermée.

L'abaque du temps de réponse réduit est représenté sur la **figure 14**.

**Q32.** Déterminer le temps de réponse à **5%**.

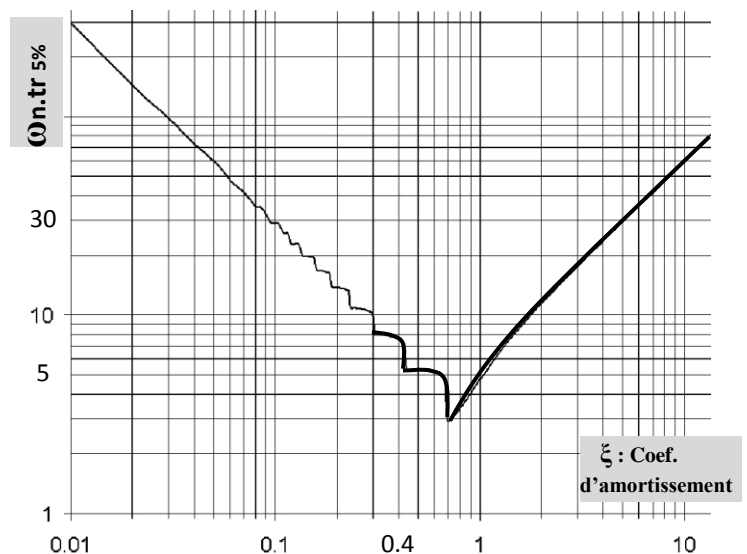
**Q33.** Tracer sur le document réponse **DR4**, l'allure de la réponse temporelle  $\omega_r(t)$  de ce système en faisant apparaître :

- Le signal de consigne pour une commande en échelon  $\omega_c$  de 30 rad/s.

- L'amplitude du premier dépassement **D<sub>1</sub>**.

- La pseudo période **T<sub>P</sub>**.

Conclure sur les exigences de précision, de rapidité.



**Figure 14 :** Abaque du temps de réponse réduit

**Q34.** Si l'on considère dans un premier temps que le correcteur est proportionnel de fonction de transfert :  $C(p)=K_c$ . Justifier, sans calcul, que l'écart vis-à-vis de la perturbation  $C_r(p)$  est non nul. Conclure sur l'exigence de précision.

Pour la suite nous utiliserons un correcteur PI de fonction de transfert  $C(p) = K \frac{1+T \cdot p}{T \cdot p}$ .

**Q35.** Tracer, sur votre copie, le diagramme de Bode (asymptotique et allure du diagramme réel) du correcteur. Indiquer les pentes et points caractéristiques en fonction de  $K$  et  $T$ .

**Q36.** Quel est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité.

On choisit la valeur de  $T$  de telle façon que la valeur de la pulsation conduisant à un déphasage de  $-45^\circ$  pour le correcteur seul soit dix fois plus petite que la pulsation pour laquelle la FTBO non corrigée ( $\omega_n$ ) présente un déphasage de  $-90^\circ$ .

**Q37.** Déterminer l'expression numérique de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée, sous la forme canonique suivante  $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}(1+T \cdot p)}{p(1 + \frac{2 \cdot \xi_{BO}}{\omega_{nBO}} p + \frac{1}{\omega_{nBO}^2} p^2)}$ .

Indiquer son gain, son ordre et sa classe. Justifier la valeur de  $T=0,2$  s.

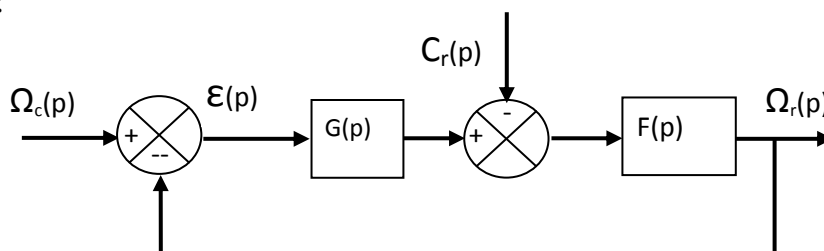
**Q38.** Tracer dans le plan de Bode du document réponse **DR5**, les asymptotes et la courbe réelle de gain de la FTBO corrigée avec  $K = 1$ . Indiquer les pentes et points caractéristiques.

**Q39.** Déterminer la plus grande valeur de  $K$  (notée  $K_{stab}$ ) permettant de satisfaire les critères de stabilité (répondre sur **DR 6**). Porter sur les courbes les tracés nécessaires.

On donne, sur le document réponse **DR6**, les courbes de la réponse  $\omega_r(t)$  du système à une entrée en échelon :  $\omega_c(t) = 30 \cdot u(t)$  par simulation, pour différentes valeurs de  $K$ .

**Q40.** Choisir la valeur de  $K$  permettant de respecter à la fois les critères de stabilité, amortissement, rapidité et précision. Justifier vos réponses et porter sur les courbes les tracés nécessaires.

Le correcteur ayant été dimensionné, le schéma-bloc précédent peut se mettre sous la forme suivante :



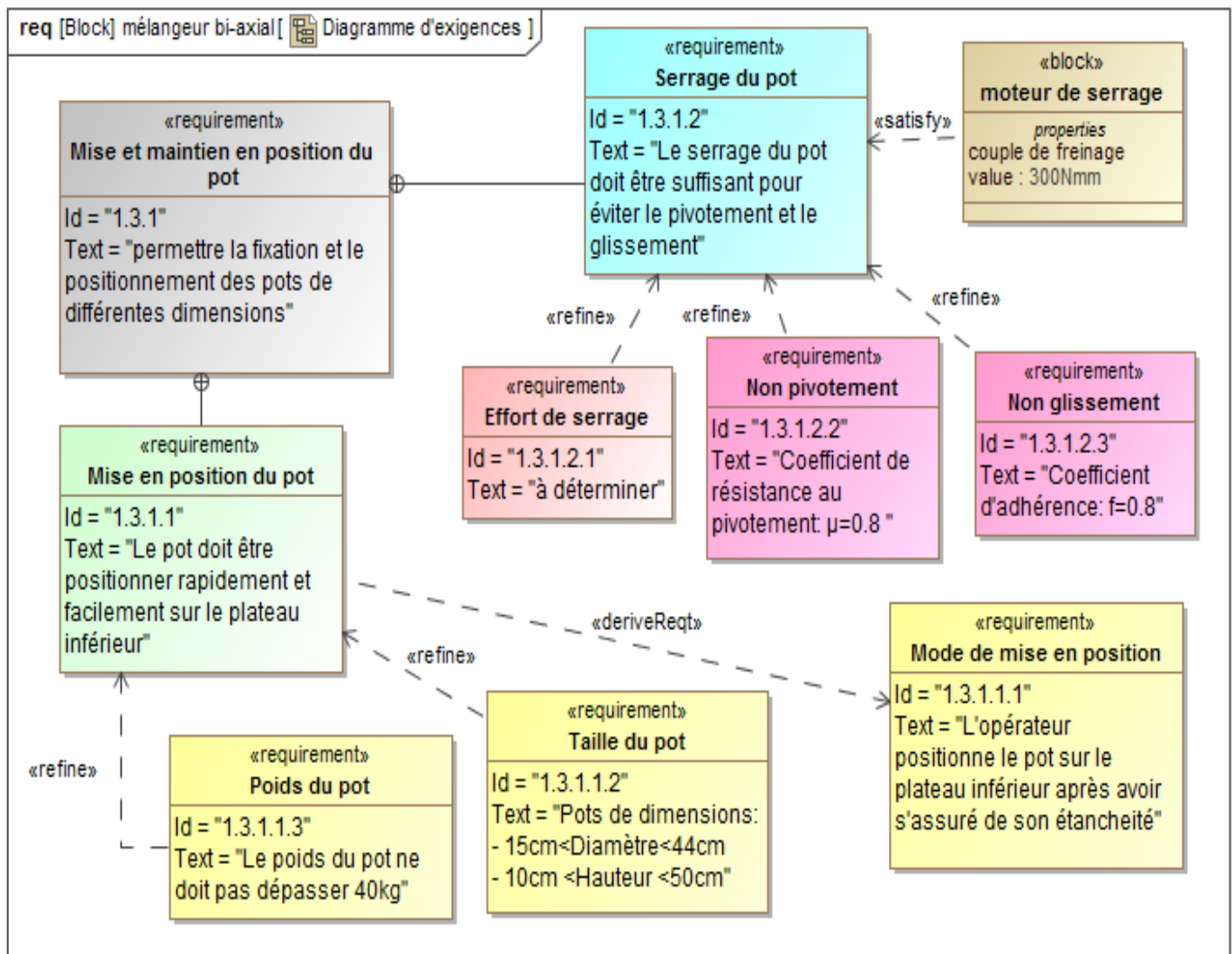
$$\text{Avec : } G(p) = \frac{12,7(1+0,2p)}{p(1+2 \cdot 10^{-3} p)} ; F(p) = \frac{(1+2 \cdot 10^{-3} p)}{(1+0,02\sqrt{2} \cdot p+4 \cdot 10^{-4} p^2)}$$

**Q41.** Déterminer la valeur de l'erreur de trainage en régime permanent  $\varepsilon_{tp}$  à un couple perturbateur en rampe  $C_r(t)=C_0 \cdot t \cdot u(t)$ , avec  $C_0=40\text{Nmm}$ .  
L'exigence identifiée **1.3.2.1.1.1.3** est-elle respectée ? Justifier.

#### Partie IV : Etude du risque de glissement du pot

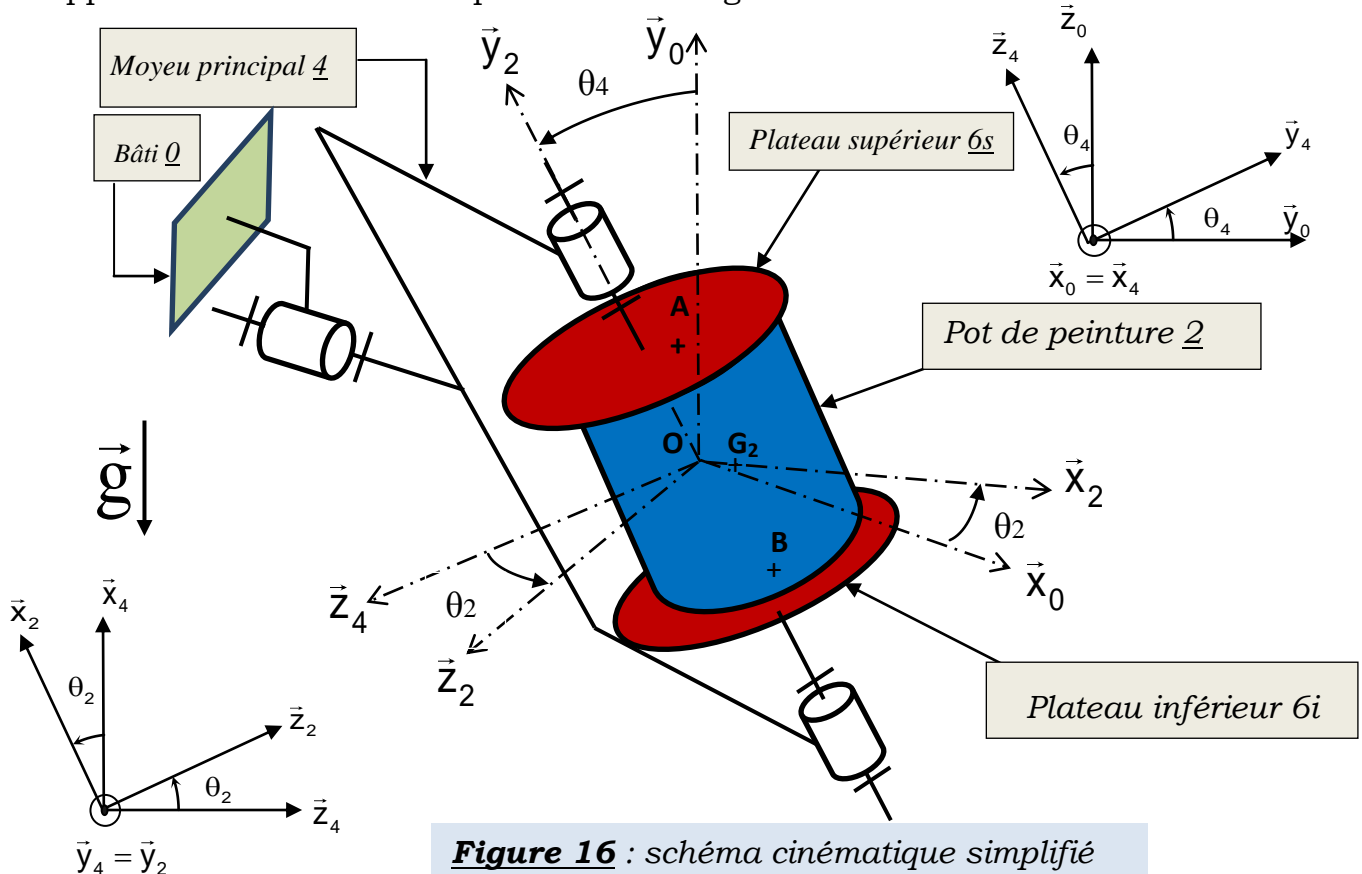
Objectif : valider l'exigence identifiée **1.3.1.2.3**

On donne ci-après (figure 15) l'extrait du diagramme partiel de l'exigence identifiée 3.1 « Mise et maintien en position du pot ».



**Figure15** : Diagramme partiel de l'exigence : « id 1.3.1 »

On rappelle la modélisation simplifiée du mélangeur.



**Figure 16** : schéma cinématique simplifié

Données et hypothèses :

- ✓ Le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti (0) et supposé galiléen.
- ✓ Les actions mécaniques entre le plateau supérieur (6s) et le pot de peinture (2) seront modélisées par le torseur suivant  $\left\{ \tau_{(6s \rightarrow 2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} T_{xs} \cdot \vec{x}_2 + T_{ys} \cdot \vec{y}_2 + T_{zs} \cdot \vec{z}_2 \\ M_s \cdot \vec{y}_2 \end{array} \right\}_A$ ,

$$\vec{OA} = a \cdot \vec{x}_2 + \frac{H}{2} \vec{y}_2.$$

- ✓ Les actions mécaniques entre le plateau inférieur (6i) et le pot de peinture (2) seront modélisées par le torseur suivant  $\left\{ \tau_{(6i \rightarrow 2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} T_{xi} \cdot \vec{x}_2 + T_{yi} \cdot \vec{y}_2 + T_{zi} \cdot \vec{z}_2 \\ M_i \cdot \vec{y}_2 \end{array} \right\}_B$ ,

$$\vec{OB} = a \cdot \vec{x}_2 - \frac{H}{2} \vec{y}_2.$$

- ✓ On considère le pot (2), de masse  $M$ , excentré sur les plateaux et  $G_2$  son centre d'inertie tel que  $\vec{OG}_2 = a \cdot \vec{x}_2$ .
- ✓ Le pot (2) sera considéré comme un cylindre d'axe de révolution  $(G_2, \vec{y}_2)$ , de matrice

$$\text{d'inertie en } O, \text{ dans la base } (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \text{ est défini par } \bar{I}_O(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}.$$

✓ L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$ .

Avec l'hypothèse que les vitesses de rotations  $\dot{\theta}_4$  et  $\dot{\theta}_2$  **sont des constantes**, on retient, pour la suite, les expressions suivantes des vecteurs accélération et moment dynamique de (2) dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

$$\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_0) = \Gamma_x \cdot \vec{x}_2 + \Gamma_y \cdot \vec{y}_2 + \Gamma_z \cdot \vec{z}_2 \quad \text{et} \quad \vec{\delta}(O, 2/R_0) = \delta_x \cdot \vec{x}_2 + \delta_y \cdot \vec{y}_2 + \delta_z \cdot \vec{z}_2$$

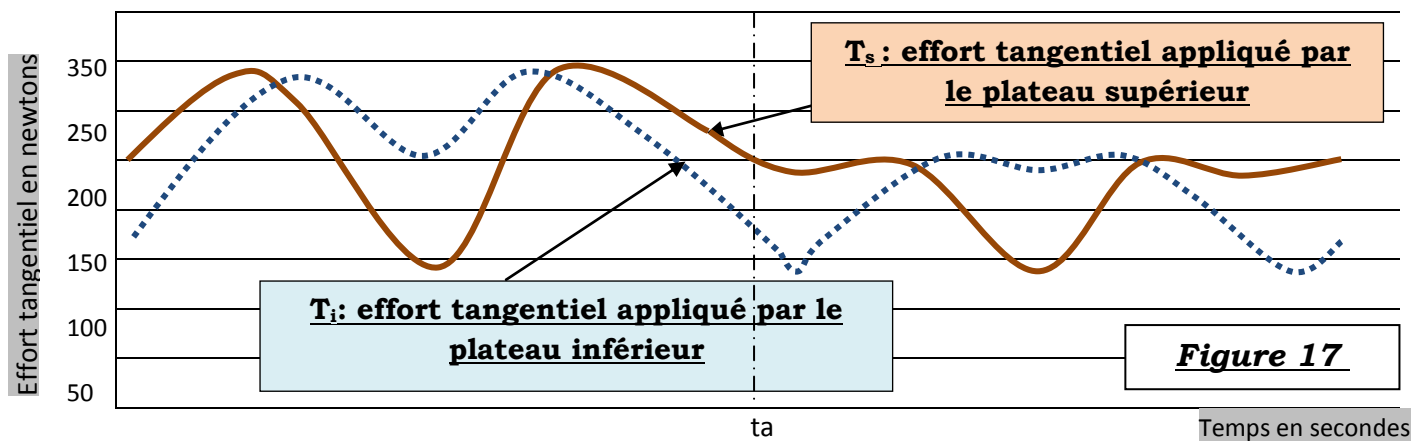
**Q42.** Déterminer les équations scalaires issues de l'application du théorème de la résultante dynamique au pot de peinture (2) en projection dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

**Q43.** Déterminer les équations scalaires issues de l'application du théorème du moment dynamique en O, au pot de peinture (2) en projection sur les axes :  $(O, \vec{x}_2)$  et  $(O, \vec{z}_2)$ .

**Q44.** En déduire les expressions des efforts tangentiels  $T_{xs}$ ,  $T_{zs}$ ,  $T_{xi}$  et  $T_{zi}$ , en fonction des données du problème.

Une étude numérique a permis de tracer l'évolution de la résultante des efforts tangentiels en fonction du temps (voir **figure 17** ci-après).

Les facteurs de frottement  $f$  et de pivotement  $\mu$  entre les plateaux (6) et le pot de peinture (2) sont supposés constants et évalués à 0,8.



**Q45.** Commenter les courbes et déduire le module des efforts normaux  $N_s$  et  $N_i$  à la limite de glissement.



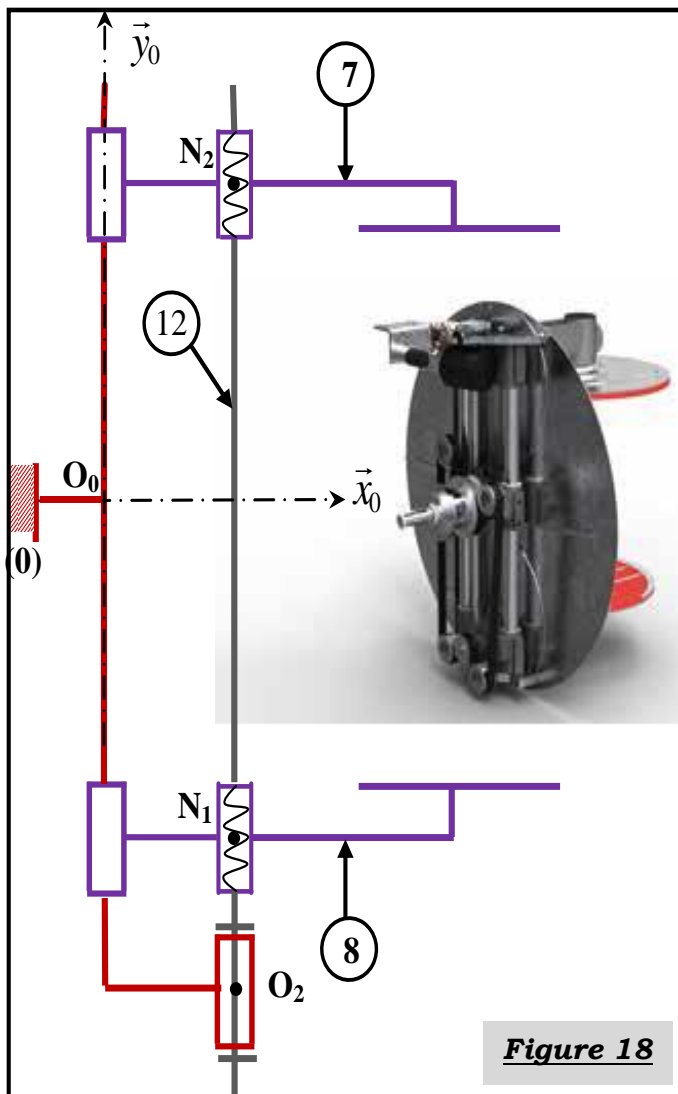
### Partie IV : Etude de l'hyperstaticité du système de serrage

Objectif : valider la solution retenue pour le guidage en translation du système de serrage.

Le schéma cinématique partiel du système de serrage (**figure 18**) est représenté ci-dessous :

L'étude se fera dans la phase de serrage du pot et consiste à déterminer et justifier l'hyperstaticité du mécanisme.

Le système de serrage simplifié est constitué des éléments suivants :



**Figure 18**

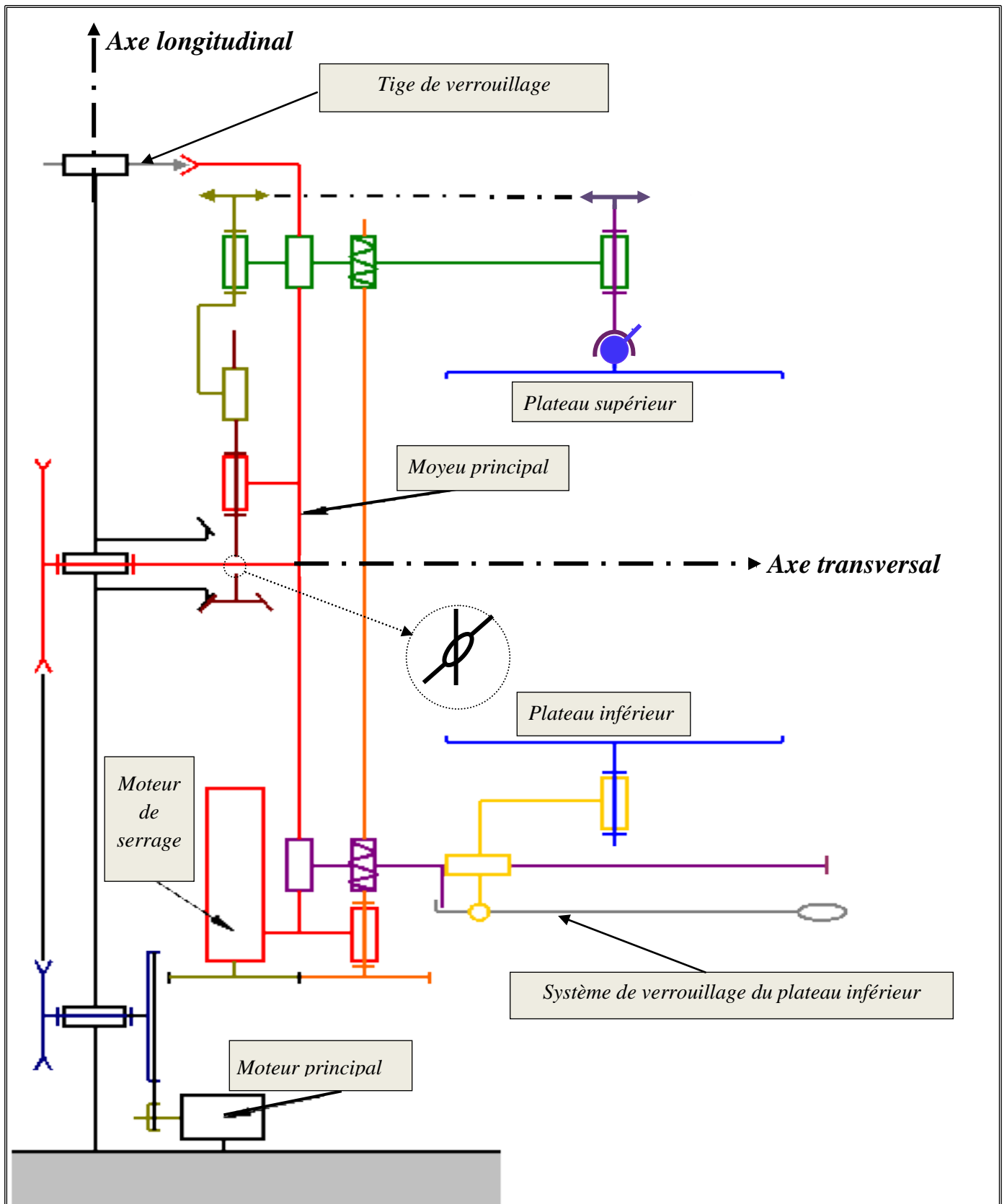
- **Colonne de guidage liée au bâti 0** : repère lié :  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- **Vis 12** : en liaison pivot parfaite d'axe  $(O_2, \vec{y}_0)$  avec la colonne (0).
- **Tête supérieure 7** : en liaison glissière parfaite de direction  $\vec{y}_0$  avec la colonne (0) et en liaison hélicoïdale, à droite et de pas  $\mathbf{p}$  d'axe  $(N_2, \vec{y}_0)$  avec la vis (12).
- **Tête inférieure 8** : en liaison glissière parfaite de direction  $\vec{y}_0$  avec la colonne (0) et en liaison hélicoïdale, à gauche et de pas  $\mathbf{p}$  d'axe  $(N_1, \vec{y}_0)$  avec la vis (12).

#### Q46

- Tracer le graphe de liaisons du mécanisme
- Donner en le justifiant, sa mobilité utile et interne.
- En appliquant la formule de mobilité, déterminer son degré d'hyperstaticité  $\mathbf{h}_1$
- Proposer une nouvelle solution permettant de rendre le degré d'hyperstaticité :  $\mathbf{h}_2 = 2$ .
- Justifier pourquoi le constructeur a opté pour la première solution.

**--Fin de l'énoncé--**

Annexe 1 :

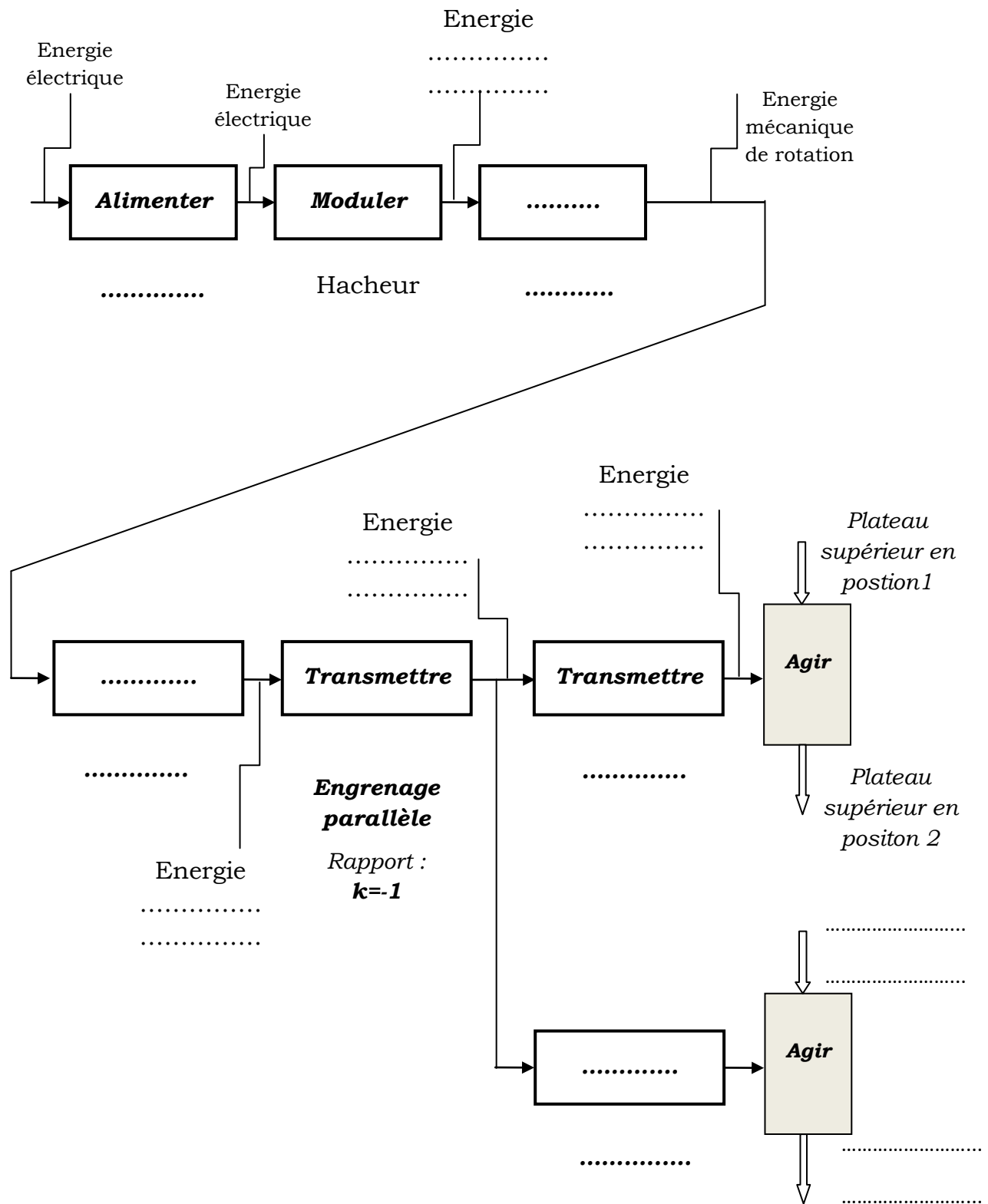


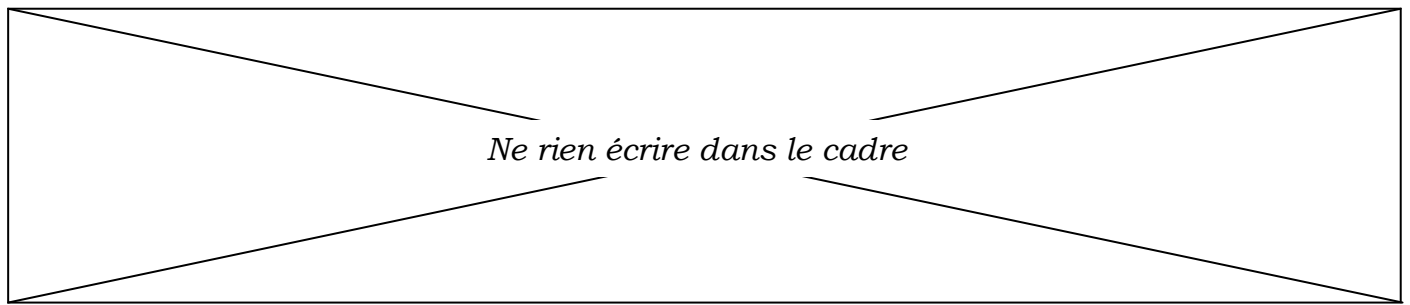
**Schéma cinématique du mélangeur**

Ne rien écrire dans le cadre

**Document réponse DR1**

**Q1.**



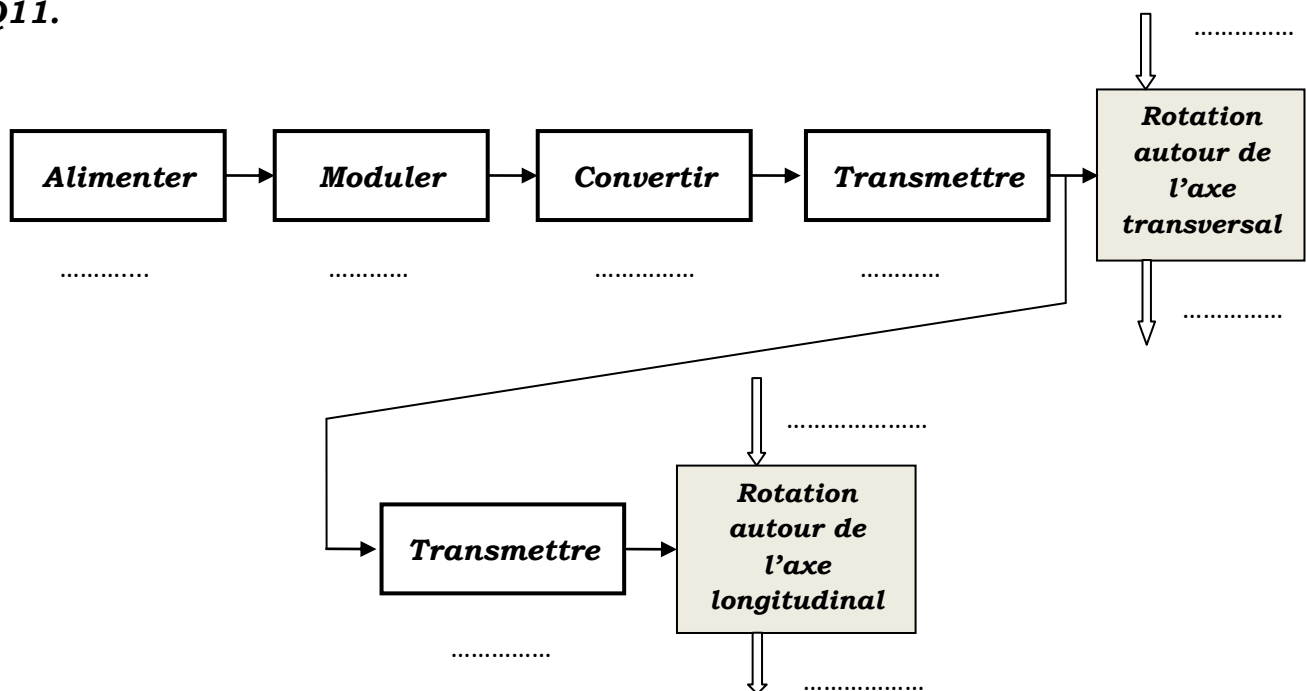


**Document réponse DR2**

**Q6.**

Liaisons	Torseurs des actions mécaniques transmissibles dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$	Liaisons	Torseurs des actions mécaniques transmissibles dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
$L_{0-12}$	$\{\tau(0 \rightarrow 12)\} = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\}_{O_2}$	$L_{0-7}$	$\{\tau(0 \rightarrow 7)\} = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\}_{O_0}$
$L_{12-8}$	$\{\tau(12 \rightarrow 8)\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12-8} \quad L_{12-8} \\ Y_{12-8} \quad \frac{p}{2\pi} Y_{12-8} \\ Z_{12-8} \quad N_{12-8} \end{array} \right\}_{N_1}$	$L_{7-6}$	$\{\tau(7 \rightarrow 6)\} = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\}_H$
$L_{12-7}$	$\{\tau(12 \rightarrow 7)\} = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\}_{N_2}$	$L_{Ps-6}$	$\{\tau(6 \rightarrow Ps)\} = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\}_C$

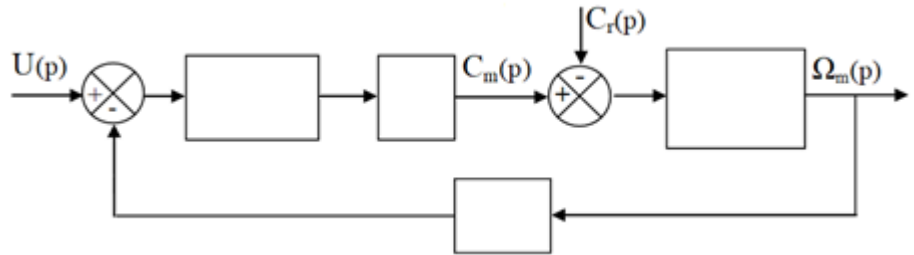
**Q11.**



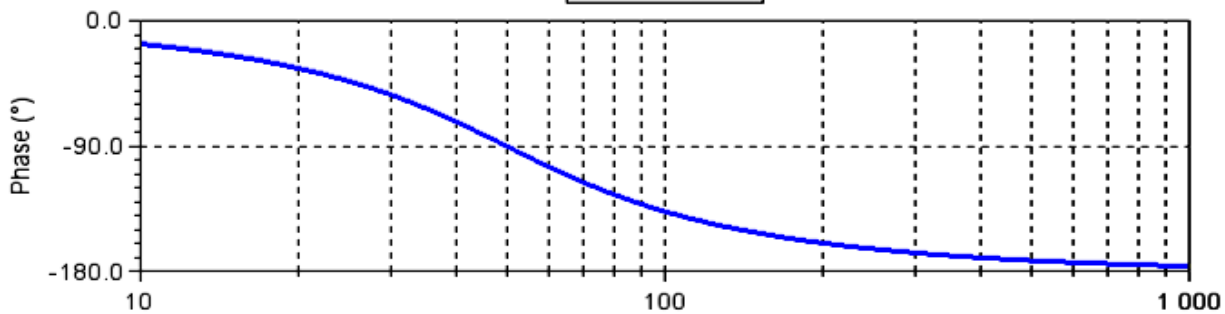
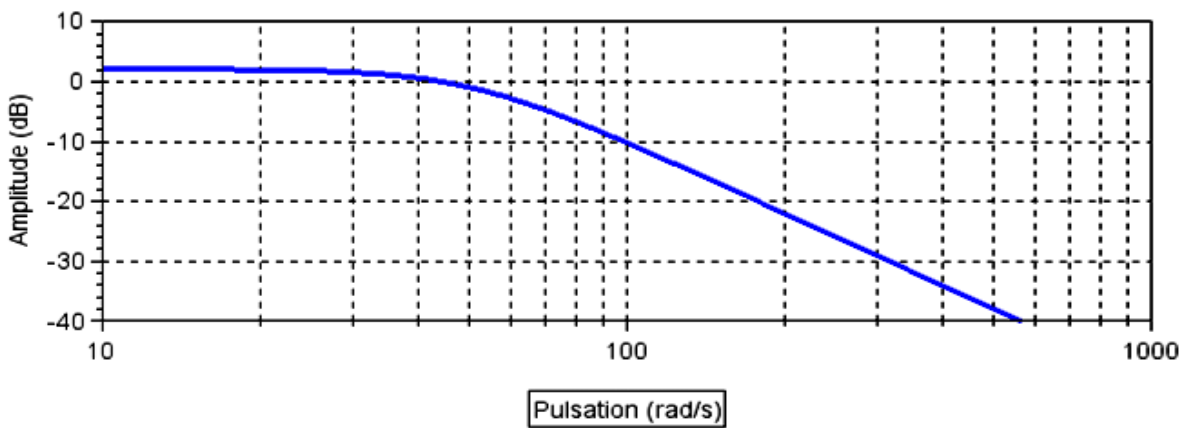
Ne rien écrire dans le cadre

**Document réponse DR3**

**Q25.** Schéma bloc du moteur :



**Q29.** Le diagramme de Bode de la FTBO du système non corrigé :  $H_{BONC}(p)$



$$H_{BONC}(p) = \frac{K_{BONC}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2}$$

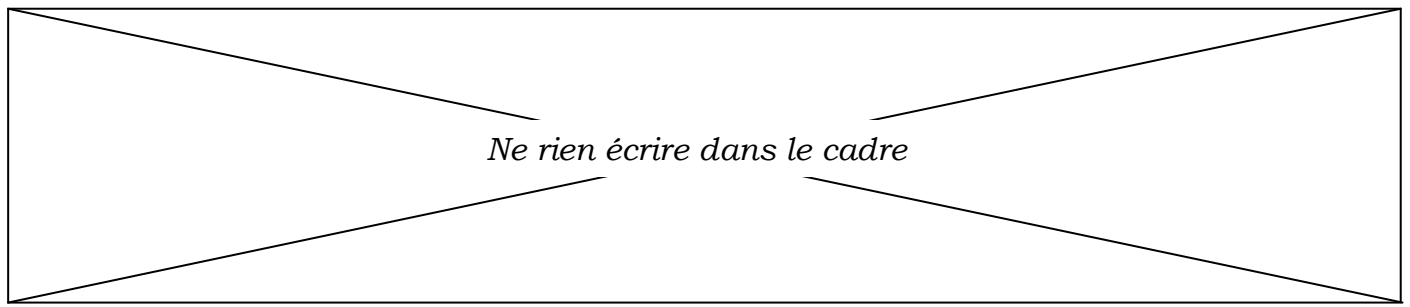
.....  
 .....  
 .....

$K_{BONC} = \dots\dots\dots$	$\xi = \dots\dots\dots$	$\omega_n = \dots\dots\dots$
------------------------------	-------------------------	------------------------------

**Q30.**

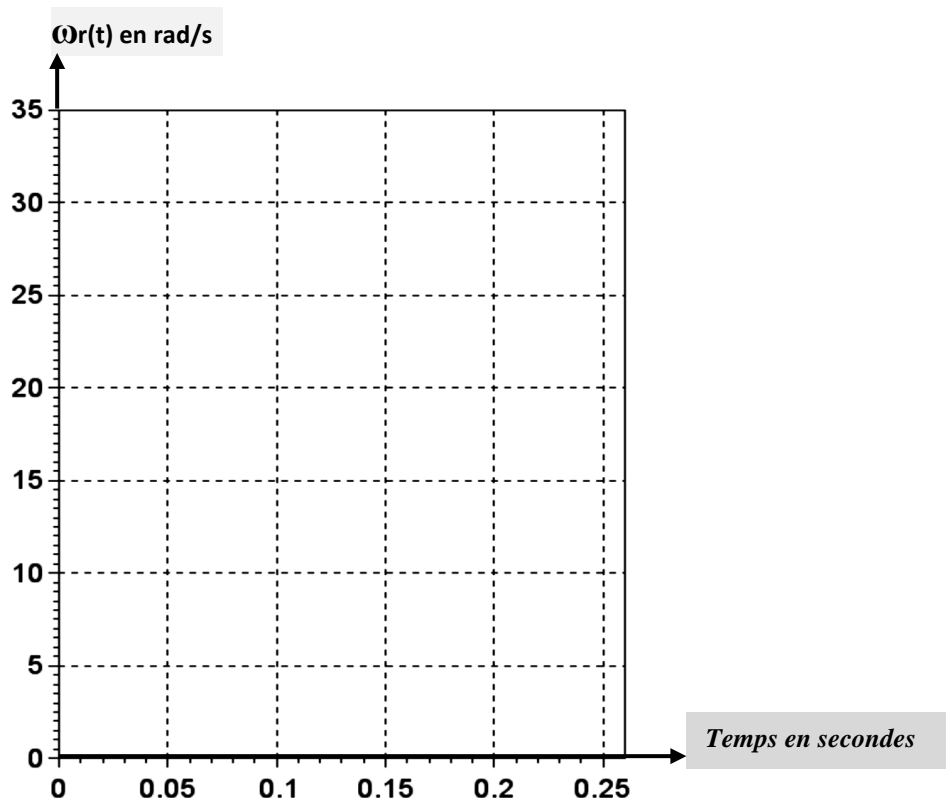
Marges de stabilité : .....	Conclusion : .....
.....	.....





**Document réponse DR4**

**Q33.** Allure de la réponse temporelle  $\omega_r(t)$ :



- Premier dépassement  $D_1$  :

.....

.....

.....

- La pseudo période  $T_p$ :

.....

.....

.....

-Conclusion :

.....

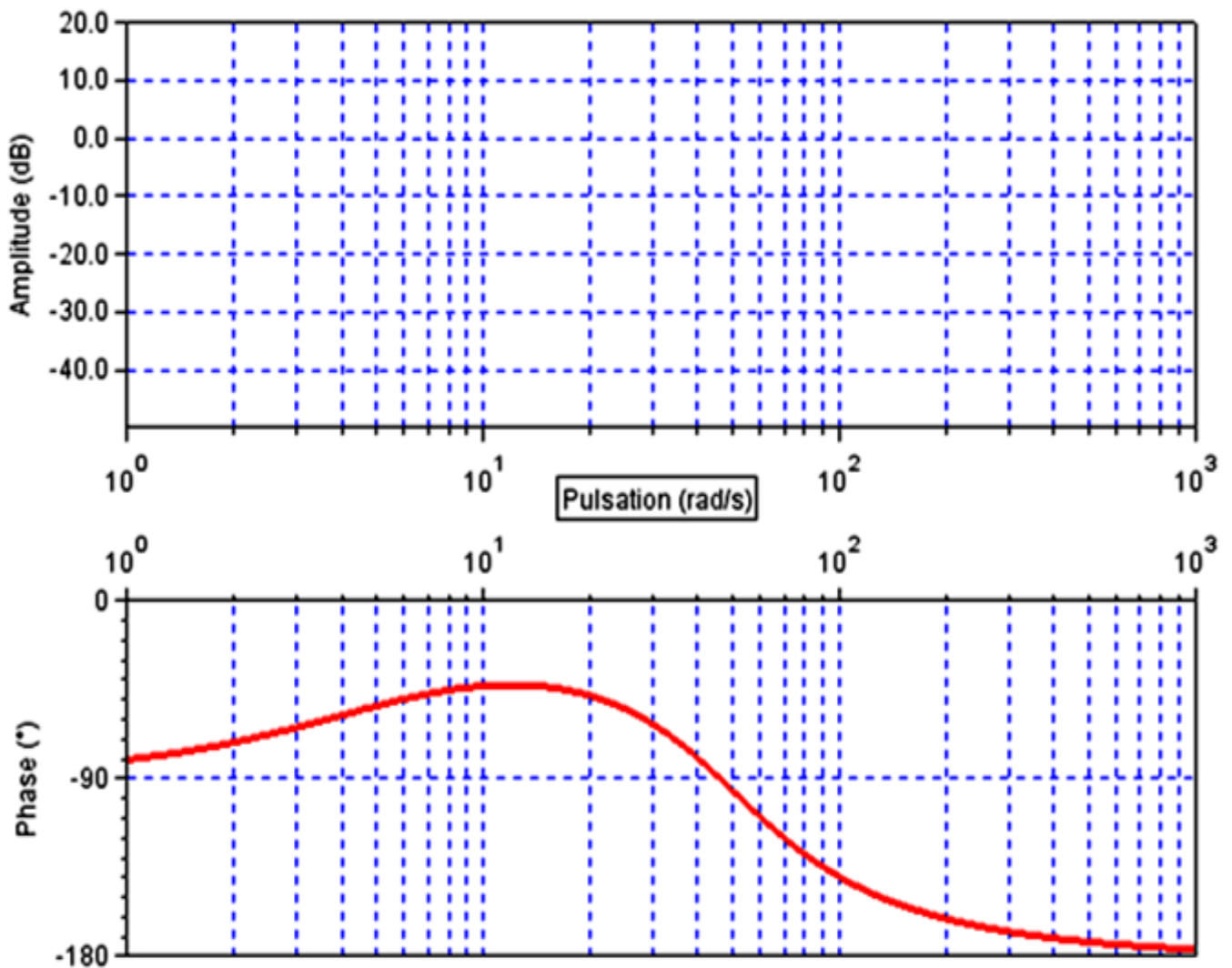
.....

.....

Ne rien écrire dans le cadre

### Document réponse DR5

Q38. Diagramme asymptotique de Bode de la FTBO corrigée pour  $K = 1$  :



Ne rien écrire dans le cadre

**Document réponse DR6**

**Q39.** La plus grande valeur de  $K$  (notée  $K_{stab}$ ) permettant de satisfaire au critère de stabilité :

.....

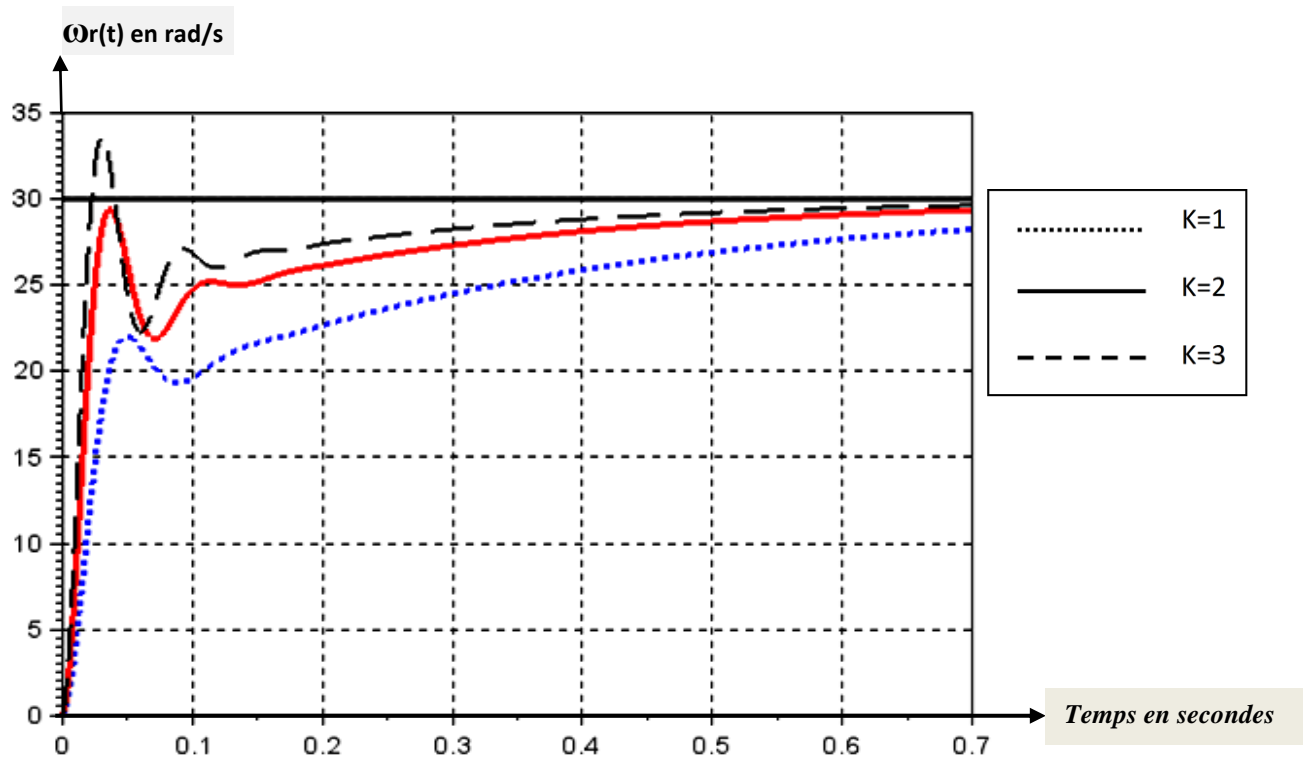
.....

.....

.....

.....

**Q40.** Courbes de la réponse indicielle pour différentes valeurs de  $K$ :



Justification :

.....

.....

.....

.....