

CONCOURS D'ACCES A L'ENSAM-MEKNES ET A L'ENSAM-CASABLANCA

Epreuve de Mathématiques : Filière Sciences Mathématiques A et B

Vendredi 24 Juillet 2015 - Durée : 2h

Partie I : Questions à réponses précises

Chaque réponse est notée sur 2pts

	Questions	Réponses
Q1	Soit la proposition $P$ : " $\forall a \in \mathbb{R}_+^* ; a + \frac{1}{a} \geq 2$ ". Donner la négation et le tableau de vérité de la proposition $P$ .	$\bar{P}$ : $P$ est
Q2	Le code confidentiel d'une carte bancaire est constitué d'un nombre de 4 chiffres non nuls. Combien y-a-t-il de codes contenant une fois, et une seule, le chiffre 1 ?	
Q3	Soient les nombres complexes suivants : $z = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ , $a = z + z^2 + z^4$ et $b = z^3 + z^5 + z^6$ . Sachant que $a + b = -1$ et $\bar{b} = a$ , donner la valeur de la somme $S = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ .	$S =$
Q4	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectivement $a = 2$ , $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$ . Donner la forme trigonométrique de $z = \frac{c-a}{b-a}$ , et déduire l'angle $\theta$ de la rotation qui transforme $B$ en $C$ .	$z =$ $\theta =$
Q5	Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3^{\cos(x)} + 3^{\cos(\pi-x)+1} \leq 2\sqrt{3}$ .	$S =$
Q6	Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ; où $f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{2x^2}$ .	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$
Q7	Soit $g$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{x+1} + 1$ si $x > 0$ et $g(0) = a \in \mathbb{R}$ . Déterminer la valeur de $a$ pour que $g$ soit continue sur $[0, +\infty[$ .	$a =$ $=$
Q8	Soit $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ . Déterminer $f^{-1}$ .	$Df^{-1} =$ $f^{-1}(x) =$
Q9	Déterminer la primitive $F$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ qui vaut 1 en $e$ .	$F(x) =$
Q10	Calculer, en utilisant les sommes de Riemann, la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ .	$\lim_n u_n =$
Q11	Soient $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)$ et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\ \vec{i}\  = \ \vec{j}\  = 1\text{cm}$ . Calculer l'aire $A$ de la surface délimitée par $C_f$ et les droites $x = 0$ , $x = 1$ et $y = 0$ .	$A =$
Q12	Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ , $\forall n \geq 1$ . Calculer $\lim_n I_n$ .	$\lim_n I_n =$
Q13	Sachant que $x \mapsto \sin^2(x)$ est une solution de l'équation différentielle $(E): y'' + 4y - 2 = 0$ , déterminer la solution particulière $y_0$ de $(E)$ telle que sa courbe passe par $A(0, \sqrt{2})$ et ayant une tangente en $A$ de coefficient directeur 1.	$y_0 =$
Q14	Soit $S$ la sphère d'équation cartésienne: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0$ . Déterminer l'équation $(E)$ du plan tangent $\mathcal{P}$ à $S$ au point $O(0,0,0)$ .	$(E):$
Q15	Sachant que $10^{3n} \equiv 1[27], \forall n \in \mathbb{N}$ , déterminer le reste $r$ de la division euclidienne de $10^{100} + 100^{10}$ par 27.	$r =$
Q16	Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 - 2y^2 + xy + 2 = 0$	$S =$
Q17	Une usine produit des pièces dont 2% sont défectueuses. Après contrôle, on s'est aperçu que 97% des pièces bonnes sont acceptées et 99% des pièces défectueuses sont rejetées. Quelle est la probabilité $P$ d'avoir une pièce bonne et rejetée ?	$P =$

Partie II : Questions à choix multiples

Une réponse correcte = 2pts, aucune réponse = 0pts, plus d'une réponse ou une réponse fausse = - 1pt

Q18. Soit  $M_3(\mathbb{R})$  l'espace des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. La matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  vérifie :

- |                                        |                                             |                                                                    |                                                                          |
|----------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $A^3 \neq 2I$ | <input type="checkbox"/> $A$ non inversible | <input type="checkbox"/> $\{I, A^3\}$ libre dans $M_3(\mathbb{R})$ | <input type="checkbox"/> $A$ est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A^2$ |
|----------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|

Q19. Soient l'espace vectoriel réel  $E = \{f: x \mapsto (ax + b)e^{2x}; a, b \in \mathbb{R}\}$  et  $f_1$  et  $f_2$  les deux éléments de  $E$  définies par :  $f_1(x) = e^{2x}$  et  $f_2(x) = xe^{2x}$ . Soit  $B = \{f_1, f_2\}$  et  $g: x \mapsto \int_0^x (t + \frac{1}{2})e^{2t} dt$ . Alors

- |                                                                |                                       |                                                                                                             |                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> les vecteurs $f_1$ et $f_2$ sont liés | <input type="checkbox"/> $g \notin E$ | <input type="checkbox"/> $B$ est une base de $E$ et les coordonnées de $g$ dans $B$ sont $(0, \frac{1}{2})$ | <input type="checkbox"/> $B$ est une base de $E$ et les coordonnées de $g$ dans $B$ sont $(0, 1)$ |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|

Q20. On considère le disque unité  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$  et la proposition  $P: \exists A, B \subset \mathbb{R}; D = A \times B$ . Alors

- |                                                          |                                                          |                                         |                                                    |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $(1, 0) \in D$ et $P$ est vraie | <input type="checkbox"/> $(0, 1) \in D$ et $P$ est vraie | <input type="checkbox"/> $P$ est fausse | <input type="checkbox"/> aucune des trois réponses |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------|

Q21. Soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . L'équation :  $f(x) = 1 - x^n, n \geq 1$

- |                                              |                                                          |                                                    |                                                    |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> n'a pas de solution | <input type="checkbox"/> admet deux solutions distinctes | <input type="checkbox"/> admet une solution unique | <input type="checkbox"/> aucune des trois réponses |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|

Q22. Soit  $f(x) = x - \ln|2e^x - 1|$ . Alors

- |                                                               |                                                                         |                                                               |                                                    |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $f$ bornée au voisinage de $-\infty$ | <input type="checkbox"/> $f$ n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$ | <input type="checkbox"/> $f$ bornée au voisinage de $+\infty$ | <input type="checkbox"/> aucune des trois réponses |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|

Q23. Soit  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} + \ln(x)$ . La courbe représentative  $C_f$  de  $f$

- |                                                                                                                 |                                                                   |                                                             |                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = 0$ | <input type="checkbox"/> admet une asymptote oblique en $+\infty$ | <input type="checkbox"/> est au-dessus de la droite $y = 0$ | <input type="checkbox"/> aucune des trois réponses |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|

Q24. L'équation  $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$  admet dans  $[-\pi, \pi]$

- |                                                    |                                      |                                      |                                          |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> une infinité de solutions | <input type="checkbox"/> 8 solutions | <input type="checkbox"/> 4 solutions | <input type="checkbox"/> aucune solution |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------|

Q25. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Alors le nombre  $N = a^4 + 4b^4$  vérifie :

- |                                                |                                                |                                          |                                                |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $N < (a - b)^2 + b^2$ | <input type="checkbox"/> $N < (a + b)^2 + b^2$ | <input type="checkbox"/> $N$ est premier | <input type="checkbox"/> $N$ n'est pas premier |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------|