# Mathématiques I - 2013

**Question 1** : On considère une succession de sacs que l'on désigne par $S_1$, $S_2$,…. Sk
Au départ le sac $S_1$ contient 2 jetons noirs et un jeton blanc ; tous les autres sacs contiennent chacun un jeton noir et un jeton blanc.

On tire au hasard un jeton du sac $S_1$ que l'on place dans le sac $S_2$. Puis on tire au hasard un jeton du sac $S_2$ que l'on place dans le sac $S_3$, et ainsi de suite.

On note $B_k$ l'évènement : << le jeton tiré du sac $S_k$ est blanc >>, et $p_k=p(B_k)$ sa probabilité.
Alors pour tout $n \geq 1$ :

A: $P_{n+1} = 1/3p_n +2/3$; B: $P_{n+1} = 1/3p_n+1/3$; C: $P_{n+1} = 1/3p_n - 2/3$;
D: $P_{n+1} = 1/3p_n -1/3$ ; E: Autre réponse

**Question 2**: Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$, et on suppose que $n \geq 3$. On tire au hasard et successivement 3 boules de l'urne ; les tirages sont effectués sans remise.
La probabilité de l'évènement : " On a obtenu dans l'ordre trois numéros consécutifs" est :

A : $\frac{1}{n^2}$ ; B : $\frac{1}{n(n-1)(n+1)}$ ; C : $\frac{1}{n(n-1)}$ ; D : $\frac{1}{n(n+1)}$ ; E: Autre Réponse

**Question3** : Soit X une variable aléatoire a densité, de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.
On pose $Y = -\beta \ln(X)$ ; $\beta$ étant un nombre réel strictement positif.
Déterminer l'espérance mathématique de Y.

A/ $\frac{\beta}{2} + 1$ ; B/ $2\beta$ ; C/ $\beta$ ; D/ $\ln(\beta)$ ; E/ Autre Réponse

**Question4 :**
Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant (n+1), soit il y reste, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.
On note $A_n$ l'événement : " le mobile se trouve en A à l'instant n ".
$B_n$ l'événement : " le mobile se trouve en B à l'instant n".
$C_n$ l'événement : " le mobile se trouve en C à l'instant n".
On pose ; $a_n=p(A_n)$ , $b_n=p(B_n)$ et $c_n=p(C_n)$.
Soit le vecteur-colonne de $\mathbf{R}^3$ : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
On a alors : $X_{n+1} = M.X_n$ , où M est la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

A) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

E) Autre réponse

**Question 5** : Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité de probabilité la fonction réelle $f$ définie par :
$f(x) = a \exp(-3x^2)$ Pour tout x réel où $\boldsymbol{a}$ est une constante à déterminer éventuellement.
L'écart-type de X est :

A : $\frac{1}{3}$ ; B : $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; C : $\sqrt{6}$ ; D : $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ; E : Autre Réponse

**Question 6** : Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité $f$ définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & si\ x > a \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad ; a \in IR$$

Déterminer le nombre réel m tel que : $F(m) = \frac{1}{2}$, où F est la fonction de répartition de X.

A/ ln2 ; B/ a+ln2 ; C/ $a - \frac{1}{3}ln2$ ; D/ $\frac{1}{2}a$ ; E/ Autre Réponse.

**Question 7** Soit $a$ un nombre réel non nul, on considère la suite $(p_n)_{n\geq0}$ définie par $\forall n \in IN$,
$p_n = \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^n}{n!}\right)$
Pour quelle valeur de $a$, la suite $(p_n)_{n\geq0}$ définit-elle une loi de probabilité ?
A/ ln2 ; B/ ln (8-2$e$) ; C/ 1-ln (8-$e$) ; D/ $\frac{1}{2}$ ; E/ Autre réponse.

**Question 8** : Une urne contient 3 dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portent le numéro 6.
On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note pour tout n entier non nul, $S_n$ l'évènement << on obtient 6 à chacun des n premiers lancers >> et $P_n$ sa probabilité

Alors

A : $P_n = \frac{1}{2(\frac{1}{4})^n+1}$ ; B : $P_n = \frac{1}{2(\frac{1}{3})^n+1}$ ; C : $P_n = \frac{1}{2(\frac{1}{6})^n+1}$ ; D : $P_n = \frac{1}{2(\frac{2}{3})^n+1}$ ; E : Autre Réponse

**Question 9 :**
On donne la série statistique suivante : 14, 16, 12, 9, 11, 18, 7, 8, 9, 16, 7, 9, 18.
La médiane est égale à :

A) 9 B) 11 C) 14 D) 16 E) Autre réponse

**Question 10** : Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\geq1}$ définie par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k}$$

A/ $+\infty$ ; B/ $\frac{3}{2}$ ; C/ $3e^2$ ; D/ 2 ; E/ Autre Réponse

**Question 11** : Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale $\mathrm{I}_n$ définie par :

$$\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$$

Alors $\mathrm{I}_{n+1} =$

A : $-1-(n+1)\mathrm{I}_n$ ; B : $-1-\mathrm{I}_n$ ; C : $-1+n\mathrm{I}_n$ ; D : $-1+(n+1)\,\mathrm{I}_n$ ; E : Autre Réponse

**Question 12 :** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}dx$$

A) $\frac{3}{2}e - ln2$ ; B) $\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) + \frac{1}{e+1}$; C) $\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) + \frac{1}{e+1}$ ; D) $\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) - \frac{1}{e+1}$ ; E) Autre Réponse

**Question 13** : Calculer l'intégrale suivante : $\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnx\ dx$

A: $-13/4\,ln3 + 17/6\,ln2$ ; B : $-13/8\,ln3 + 17/3\,ln2$ ; C : $-13/8\,ln3 + 17/2\,ln2$;

D: $-13/8\,ln3 + 17/6\,ln2$; E: Autre Réponse.

**Question 14 :** Soit le système à 3 inconnues réelles x,y et z

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = -25 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x + 11y - 19z = 85 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de ce ~~-sy~~système est :

A : $\{(-z-1; 2z-8; z); z \in \mathbb{R}\}$ ; B : $\{(-z-1; 2z+8; z \in \mathbb{R})\}$ ; C : $\{(z+1; 2z+8; z); z \in \mathbb{R}\}$;

D: $\{(-1; 8; 0)\}$; E: Autre Réponse

**Question 15 :** Soit le système à 4 inconnues réelles x,y,z et t

$$\begin{cases} x - y + z - 2t = -8 \\ 2x - y + 3z + t = 23 \\ 4x + 3y + 5z - 3t = 7 \\ 5x - 2y + 8z + 5t = 77 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de ce système est :

A :$\{(2z - 3t + 31; -z - 5t + 39; z; t); (z,t) \in \mathbb{R}^2\}$ ; B :$\{(-2z + 3t + 31; z - 5t + 39; z; t); (z,t) \in \mathbb{R}^2\}$ ;
C: $\{(-2z - 3t + 31; -z - 5t + 39; z; t); (z,t)) \in \mathbb{R}^2\}$; D:$\{(28; 34; 0; 1)\}$; E: Autre Réponse

**Question 16 :** Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre réel et $\boldsymbol{n}$ un entier naturel non nul et soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1-(1+x)^{-n}}{x} & si\ x > 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}$

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0 est :
A : **a=-1** ; B : **a=0** ; D : **a=n+1** ; E : Autre Réponse

**Question 17 :**

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose : $B = \frac{1}{4}QAP$ . B est alors égale à :

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ E) Autre Réponse

**Question18 :**
On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(0) = 0 \quad et \ \forall\, x \in \mathbb{R}^* \ , \ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Soit $(C_f)$ la courbe représentative de f.
La tangente à $(C_f)$ à l'origine a pour équation :

A) y=x B) y=-x C) y=x+1 D) y=0 E) Autre réponse

**Question 19** : Soit P la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. P est inversible et son inverse $P^{-1}$ est égale à

A) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ ; B) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ ; C) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ ; D) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

E) Autre Réponse

**Question 20** : on effectue des tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires. Soit X la variable aléatoire égale au rang de sortie de la première boule blanche, et Y la variable aléatoire égale au rang de sortie de la seconde boule blanche.

Après avoir déterminé la loi du couple (X,Y), calculer la covariance de X et Y, Cov(X,Y)

A/ $\frac{1}{2}$ ; B/ -3 ; C/ $-\frac{1}{2}$ ; D/ 0 ; E/ autre réponse

Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2013

MATHEMATIQUES II

**DUREE** : 3 heures

**N.B :**

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.
4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.
5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.
6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: $-1$

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

## Question 1

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'application S de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $M_2(\mathbb{R})$ l'élément S ( M ) = J M J

L'application S est un automorphisme de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$

De plus , si M et N sont deux éléments quelconques de $M_2(\mathbb{R})$ , on a

S ( M N ) = S ( M ) S ( N )

On considère les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice représentant l'automorphisme S dans la base ( I , J , K , L ) est alors égale à

$A)\ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ $\quad B)\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ $\quad C)\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$

$D)\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ $\quad E)$ *Autre réponse*

## Question 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$$

Après avoir déterminé l'expression de $f'(x) + f(x)$ , pout tout réel x , ( où $f'(x)$ est la dérivée de de $f$ en $x$ ) , on en déduit que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge vers

$A)\ \dfrac{\ln 3}{2}$ $\qquad B)\ 2\ln 2$ $\qquad C)\ \dfrac{\ln 2}{3}$ $\qquad D)\ 3\ln 5$ $\qquad E)$ *Autre réponse*

## Question 3

On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x , y et z sont des réels

On note $\varphi$ l'application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de $\mathcal{F}$ associe le nombre

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}\,a_{ij}$$

où $a_{ij}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On note Ker $\varphi$ le noyau de $\varphi$ . La dimension de Ker $\varphi$ est alors égale à:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Autre réponse

## Question 4

Soit $f_k(x) = \dfrac{(\ln(x))^k}{x-1}$ $si\ x \neq 1$ $et$ $f_k(1) = 0$ , $où\ k \in N$ .

Pour quelles valeurs de k , $f_k$ est continue en 1 ?

A) $k \in [\,2\,, +\infty\,[$ B) $k \in [\,1\,, +\infty\,[$ C) $k \in ]\,1\,, 2\,]$ D) $k \in ]\,1\,, +\infty\,[$
E) Autre réponse

## Question 5 :

On rappelle que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $et$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On considère un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par
$N_1$ la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré ,
$N_2$ la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré .
On pose : $Z = N_1 + N_2$
La variance de la variable aléatoire Z est alors égale à :

$A)\ \dfrac{(n-1)(n+3)}{6}$ $B)\ \dfrac{(n+2)(n-3)}{6}$ $C)\ \dfrac{(n+1)(n-2)}{6}$ $D)\ \dfrac{(n+5)(n-4)}{6}$

*E) Autre réponse*

**Question 6** : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k+1}{k!}$

La suite $(S_n)$ converge vers :

A) $0$ B) $4e$ C) $\ln 2$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

**Question 7 :** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.
On pose : $Y = \ln(e^X - 1)$
Calculer $E(X)$.

A) $\ln 2$ B) $0$ C ) $\frac{e \ln 2}{2}$ D) $e - 1$ E/ Autre réponse

**Question 8** : Pour tout réel $m$ non nul, on définit la matrice $A$ suivante :

$$A = \begin{matrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{matrix}$$

L'ensemble des valeurs propres de $A$ est :
A/ $\{-m, m\}$ ; B/ $\{m, 2m\}$ C / $\{m, 2\}$ D/ $\{-1, 2\}$ E/ Autre réponse

**Question 9** : Soit $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0, a]$, où $a$ est un nombre réel non nul.

On pose : $T_n = Max(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$ et $T_n' = {}^{n+1} T_n$

La variance de $T_n'$ est :

A) $\frac{a}{n+1}$ B) $\frac{a}{2n}$ C) $\frac{a^2}{n(n+2)}$ D) $n$ E) autre réponse

**Question 10** : Soient les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \text{ telle que } M = PDP^{-1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $M^n$ est la matrice :

A) $M^n = (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_3$ B) $M^n = (2^n + 1)M + (1 - 2^n)I_3$

C) $M^n = 2^n M + (1 - 2^n)I_3$ D) $M^n = 2^n M + (1 + 2^n)I_3$ E) Autre réponse

Question 11 : Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \int_0^1 [\text{Log}(1+x)]^n dx$

Log désigne le logarithme népérien. On cherche un équivalent de $I_n$ quand $n$ tend vers l'infini;

On pourra commencer par étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis par voir la relation de récurrence liant $I_{n+1}$ à $I_n$, et enfin par trouver un encadrement de $I_n$

Alors, un équivalent de $I_n$ quand $n$ tend vers l'infini est:

A) $\frac{1}{n}(Log2)^{n+1}$ B) $\frac{2}{-}(Log2)^{n+1}$; C) $\frac{2^{n+1}}{}$; D) $\frac{2^n}{}$; E: Autre Réponse

Question 12 : Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n)}dx$

Log désigne le logarithme népérien. On cherche un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers l'infini;

On pourra commencer par remarquer que $(\forall x \geq 0)$ $\frac{1}{1+x} \leq 1$ ; puis par étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \text{Log}(1+x^n)dx$ ; puis par voir la relation de récurrence liant $u_n$ à $I_n$.

Alors, un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers l'infini est:

A) $\frac{1}{n}(Log2)^{n+1}$ B) $\frac{2}{n}(Log2)^{n+1}$; C) $\frac{2^{n+1}}{n}$; D) $\frac{\text{Log}2}{n}$; E: Autre Réponse

Question 13 : La somme $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$ est égale à:

A) $e^3$ ; B) $e^{\sqrt{3}}$; C) $\frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}}+e^{-\sqrt{3}})$ D) $\frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}}-e^{-\sqrt{3}})$ ; E) Autre réponse

$e$ désigne la base du logarithme népérien

Question 14 : La somme $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ est égale à:

A) 1 B) 2 C) $\frac{\pi^2}{12}$ D) $\frac{\pi^2}{6}$ ; E) Autre réponse

Question 15 : La somme $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ est égale à:

A) $e$ ; B) $\frac{1}{e}$; C) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$ D) $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$ ; E) Autre réponse

$e$ désigne la base du logarithme népérien

Question 16: Calculer $I = \iint_D f(x,y)dxdy$

Dans le cas où $D$ est le triangle de sommets O(0,0), A(1,0), B(0,1) et $f(x, y) = \ln(x+y+1)$

B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) Autre réponse

**Question 17**: On se donne les matrices

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$

Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Les matrices inversibles P telles que $P^{-1} A P = B$ sont de la forme :

A) $\begin{pmatrix} 15b-d & b \\ -8b & d \end{pmatrix}$ ; B) $\begin{pmatrix} 8b+2d & b \\ 15b & d \end{pmatrix}$ ; C) $\begin{pmatrix} -15b-d & b \\ -8b-16d & d \end{pmatrix}$ ; D) $\begin{pmatrix} 15b+d & 2b \\ -8b+d & 2d \end{pmatrix}$ ,

E) Autre réponse

**Question 18** Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$

A) 0 ; B) 1 ; C) -1 ; D) ½ ; E) Autre réponse

**Question 19** a, b, c et d étant des nombres réels, les matrices carrées $A = (a_{ij})$ d'ordre 4 qui commutent avec la matrice

$$J = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

sont de la forme

A) $aI + bJ^2$ ; B) $aJ + bJ^2 + cJ^3$ ; C) $aI + bJ + cJ^2 + dJ^3$ ; D) $aI + bJ^3$ ; E) Autre réponse

**Question 20** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$f(x,y) = 2x^2+2y^2+2xy-x-y$

$f$ présente

A) un minimum local en A(1/6,1/6) ; B) un minimum global en A(1/6,1/6) ;
C) un maximum local en B(-1/6,1/6) ; D) un maximum global en B(-1/6,1/6) ; E) Autre réponse