Ministère de l'éducation nationale

Session 2017

PE2-17-PG4

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Vendredi 21 avril 2017
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :
- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 11 pages, numérotées de 1 à 11. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

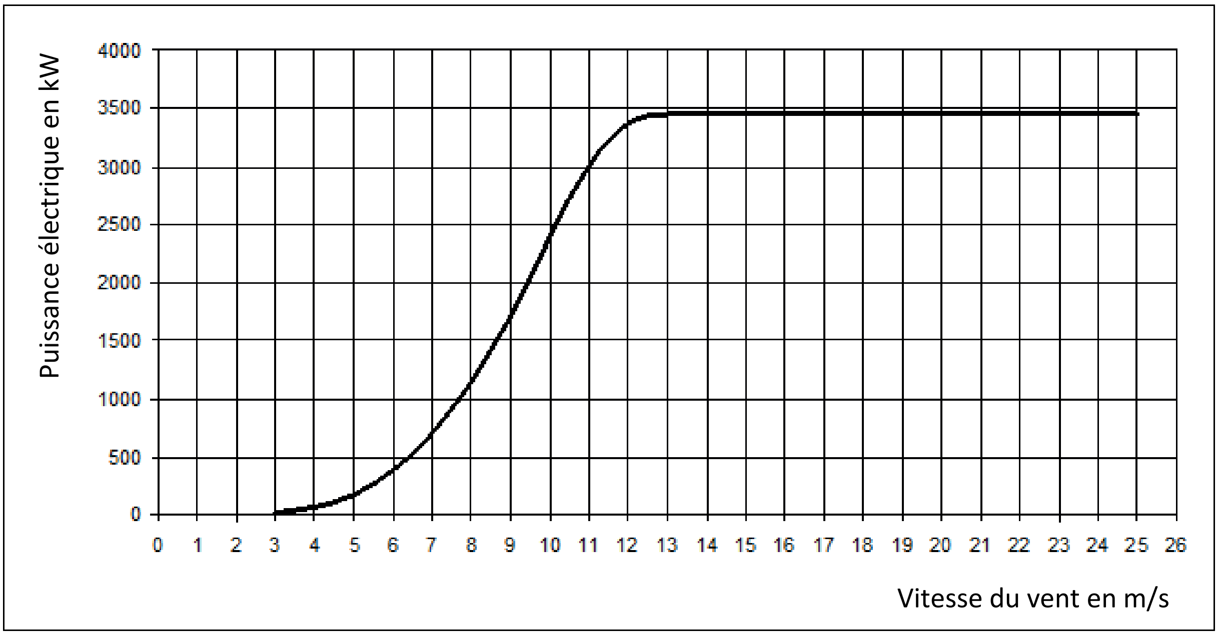
Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

Partie A : Puissance électrique d'une éolienne

Le graphique ci-dessous représente les variations de la **puissance électrique,** exprimée en kilowatt (kW) fournie par une certaine éolienne, en fonction de la **vitesse du vent**, exprimée en mètre par seconde (m/s).

La forme de la courbe dépend des caractéristiques mécaniques et électriques de l'éolienne.



Reproduit d'après la source : http://www.vestas.com/en/products/turbines/v112-3_3_mw

Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Quelle est la puissance électrique de l'éolienne quand la vitesse du vent est 11 m/s ?
2. À partir de quelle vitesse du vent la puissance électrique de l'éolienne est-elle supérieure à 500 kW ?
3. La puissance électrique de l'éolienne est-elle proportionnelle à la vitesse du vent ? Justifier.
4. Pour quelles vitesses du vent la puissance électrique de l'éolienne est-elle comprise entre 1 000 et 2 000 kW ?
5. Quelle est la puissance électrique maximale que peut fournir l'éolienne ?
6. À partir de quelle vitesse du vent, **en km/h**, la puissance électrique de l'éolienne est-elle supérieure à 3000 kW ?

Partie B : Calcul de la puissance récupérable d'une éolienne

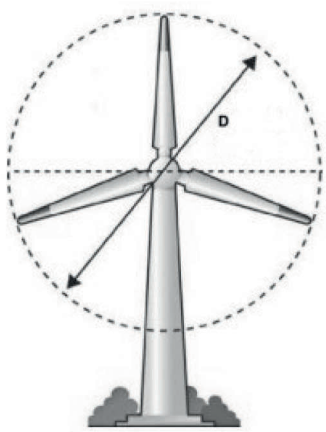
On dispose des informations suivantes sur les éoliennes :

La **puissance récupérable** d'une éolienne, exprimée en watt, notée $P_{\text{récupérable}}$, se calcule à l'aide de la formule :

$$P_{\text{récupérable}} = C_p \times P_{\text{disponible}}$$

où C_p est **le coefficient de performance** de l'éolienne et $P_{\text{disponible}}$ est la **puissance disponible** de l'éolienne, exprimée en watt, fournie par le vent.

Les puissances récupérables et disponibles fournissent des valeurs théoriques qui ne tiennent pas compte des contraintes mécaniques (minimum ou maximum de vitesse du vent).



La puissance disponible se calcule à l'aide la formule :

$$P_{\text{disponible}} = \frac{1}{2} \times r \times S \times V^3$$

où

- r est la densité de l'air (l'industrie éolienne utilise la valeur 1,225 kg/m^3),
- S est l'aire de la surface balayée par les pales de l'éolienne (en m^2), c'est-à-dire l'aire d'un disque dont le diamètre D est celui de l'éolienne (en m),
- V la vitesse du vent (en m/s).

D'après les principes de la mécanique, la valeur maximale du coefficient de performance C_p est $\frac{16}{27}$.

1. **Dans cette question, l'éolienne considérée a pour diamètre 112 m et pour coefficient de performance 0,52.**
   - **a.** Calculer l'aire de la surface balayée par les pales de cette éolienne.
   - **b.** Montrer que la puissance récupérable de cette éolienne, exprimée en watt, est $P_{\text{récupérable}} = 998{,}816\pi \times V^3$.
   - **c.** En déduire la puissance récupérable, exprimée en kilowatt, de cette éolienne pour un vent de 6 m/s. On arrondira le résultat au centième.
   - **d.** Expliquer pourquoi la puissance récupérable est multipliée par 8 lorsque la vitesse du vent est multipliée par 2.
   - **e.** La puissance récupérable de cette éolienne est-elle proportionnelle à la vitesse du vent ? Justifier.

2. Montrer que d'une manière générale, pour une éolienne de diamètre D, on a

$$P_{\text{récupérable}} < 0{,}29 \times D^2 \times V^3$$

Partie C : Étude de la production éolienne en France en 2015

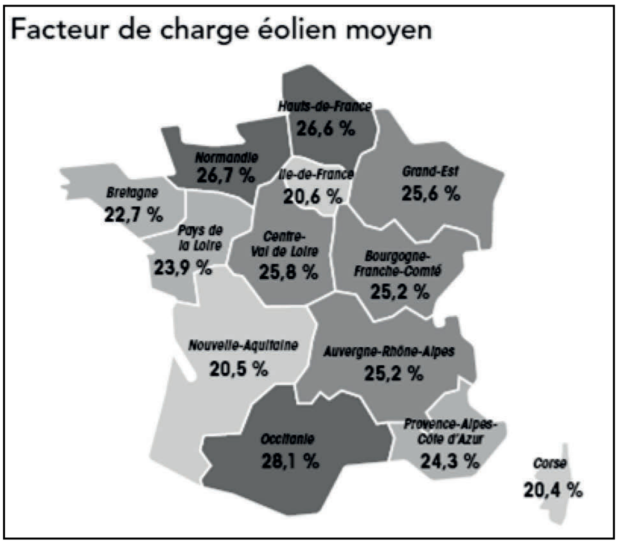
On appelle **puissance nominale** d'une éolienne la puissance électrique maximale qu'elle peut fournir.

L'énergie électrique produite par l'éolienne sur une durée t se calcule en multipliant la puissance nominale P de l'éolienne par la durée t considérée et un **facteur de charge *f*** qui dépend de la région. Cette énergie électrique est notée E. Ainsi,

$$E = P \times t \times f$$

Si la puissance nominale est exprimée en watt (W) et le temps en heure (h), l'énergie électrique sera exprimée en Watt-heure (Wh).

1. La carte représentée ci-dessous donne, suivant les régions, le facteur de charge en 2015 pour la production éolienne :



a. On considère une éolienne de puissance nominale 4 MW implantée en région Centre-Val de Loire. Calculer, en MWh, l'énergie électrique produite durant l'année 2015 par cette éolienne.
On rappelle que 1 mégawatt est égale à 1 million de watts ou encore que 1MW = 10^6 W.

b. L'énergie électrique totale produite en 2015 dans l'ensemble de la région Centre-Val de Loire par les parcs éoliens est de $1{,}98 \times 10^6$ MWh. Calculer la puissance nominale totale des éoliennes installées dans cette région.

2. L'énergie électrique totale produite par l'éolien en France en 2015 est d'environ $21{,}9 \times 10^6$ MWh. Sachant que le taux moyen de couverture de la production d'énergie électrique en France en 2015 par la production éolienne est de 4,5%, calculer l'énergie électrique produite au total en France en 2015. Arrondir le résultat au million de MWh.

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

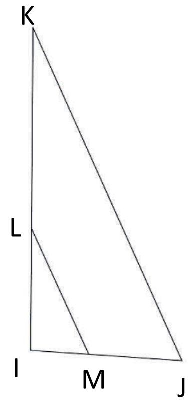
Cet exercice comporte cinq affirmations. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse fausse n'enlève pas de point, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation** : Un quadrilatère qui a trois angles droits est un carré.

2. Dans une boucherie, on peut lire : « 3 steaks hachés achetés, 1 steak en plus gratuit ». Solène demande 3 kg de viande hachée. Une fois la commande préparée, le boucher déclare : « J'ai haché la viande que j'utilise pour les steaks, aussi je vous fais bénéficier de la promotion. Vous ne payez donc que 2 kg de viande. »

Affirmation : Le boucher se trompe ; il aurait dû lui faire payer 2,250 kg de viande.

3. On considère la figure ci-contre.
On sait que :
$M \in [IJ]$
$L \in [IK]$
$IM = 0,8$
$IL = 1,6$
$LK = 2,4$
$IJ = 2$



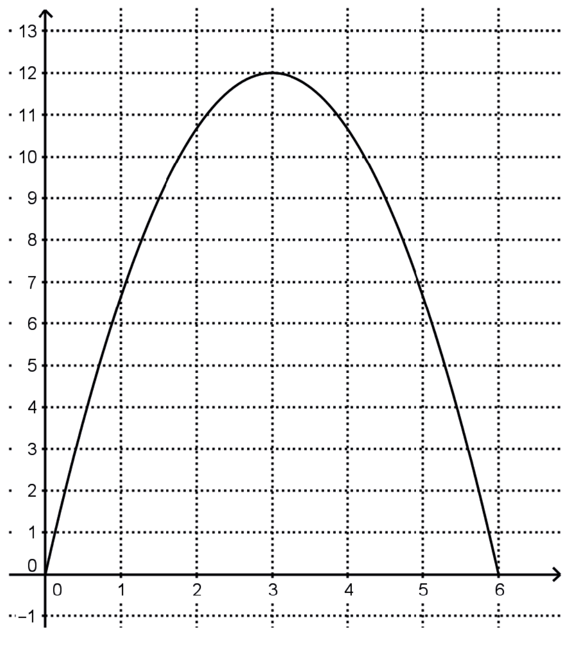
Affirmation : Les droites (ML) et (KJ) sont parallèles.

4. **Affirmation** : Le carré d'un nombre entier positif premier admet exactement trois diviseurs positifs.

5. On considère une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 6] par :

$$f(x) = 8\,x - \frac{4}{3}\,x^2$$

et on donne sa représentation graphique ci-contre :



Affirmation : 4 a pour antécédent un nombre compris entre 10 et 11.

EXERCICE 2

Jules possède deux dés cubiques équilibrés avec des faces numérotées de 1 à 6 (un rouge et un vert). Il propose à Paola un jeu au cours duquel chacun des joueurs, à tour de rôle, lance simultanément les deux dés et gagne des points suivant les règles ci-dessous :

Règle de la paire :
- Si, lors d'un lancer, un joueur fait deux 1, c'est-à-dire une paire de 1, il remporte 1000 points
- Si un joueur obtient une paire de 2, il obtient 100 fois la valeur de 2, soit 200 points.
- De même, si un joueur obtient une paire de 3 ou de 4 ou de 5 ou de 6, il obtient 100 fois la valeur du dé.

Règle des autres lancers :
- Si un joueur obtient un résultat autre qu'une paire, il obtient 50 points

Gain de la partie
- Le gagnant de la partie est le premier à atteindre au moins un total de 1000

Inspiré d'un exercice du manuel TRANSMATHS 3ème, 2016, Editions Nathan

1. Paola lance les deux dés.

a. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne exactement 400 points ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne exactement 50 points ?

2. Paola a déjà joué deux tours et a obtenu 650 points. Jules n'a toujours pas obtenu 1000 points. Elle s'apprête à lancer les dés pour une troisième fois. Quelle est la probabilité qu'elle gagne la partie lors de sont troisième lancer.

3. Quelle est la probabilité de gagner au moins 1000 points en 1 ou 2 coups ?

EXERCICE 3

Voici un programme de calcul :

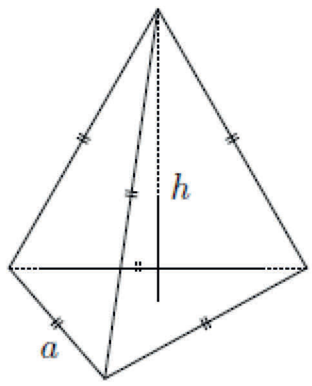
1. **a.** On applique ce programme de calcul au nombre 10. Montrer que le résultat affiché à la fin est 40.
   b. On applique ce programme de calcul au nombre –2. Quel va être le résultat affiché à la fin ? Justifier.

2. Une modification possible de l'algorithme est copiée ci-dessous, mais il manque une instruction à la 4$^{\text{ème}}$ ligne.

Comment compléter la 4$^{\text{ème}}$ ligne, là où il y a un carré blanc, par l'expression la plus simple possible pour que cet algorithme affiche le même résultat que l'algorithme précédent quel que soit le nombre entré ?

EXERCICE 4

Dounia et Yanis ont acheté un coffret contenant des sachets de thé. Ces sachets ont une forme que l'on peut modéliser par un tétraèdre régulier.

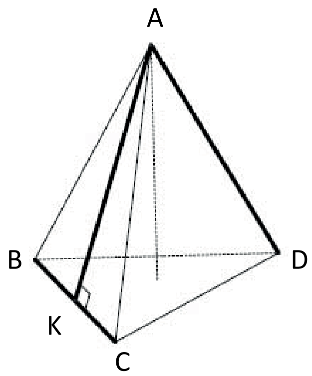


On rappelle qu'un tétraèdre régulier est une pyramide dont les 3 faces latérales et la base sont des triangles équilatéraux.

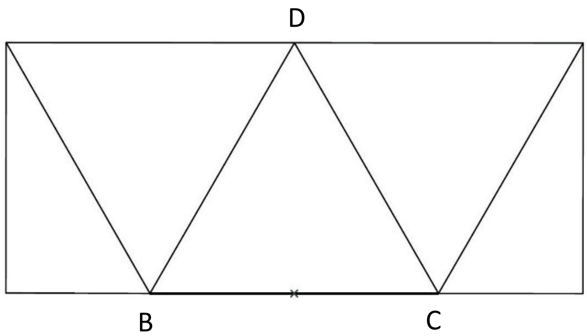
De plus, on rappelle que, pour un tétraèdre régulier ayant ses côtés de longueur notée a :

- la hauteur h correspondant à la base d'aire A_{Base} est donnée par la formule $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- le volume V est donné par la formule $V = \frac{A_{Base} \times h}{3}$.

1. Le sachet de thé de Yanis a la forme d'un tétraèdre régulier ABCD de côté 5,5 cm et est fabriqué en gaze de papier. On note K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



Yanis remarque que seuls trois « bords » sont collés (en gras sur le dessin : [AK], [BC] et [AD]). Il découpe la gaze le long de ces segments [AD], [AK], et [BC], puis il met à plat. Il obtient un rectangle.



Ce dessin n'est pas à l'échelle.

a. Déterminer les dimensions de ce rectangle.

b. Calculer le volume du sachet de thé de Yanis. On donnera une valeur arrondie au dixième de centimètre cube.

2. La marque pense proposer des sachets « grand format », présentés aussi sous la forme d'un tétraèdre régulier, mais d'un volume au moins deux fois plus grand que le sachet de thé choisi par Yanis.

Dounia pense qu'en multipliant par 1,3 les longueurs des côtés du tétraèdre ABCD, les conditions de la marque pour obtenir un sachet « grand format » seront satisfaites.

Justifier l'affirmation de Dounia.

TROISIÈME PARTIE (14 points)

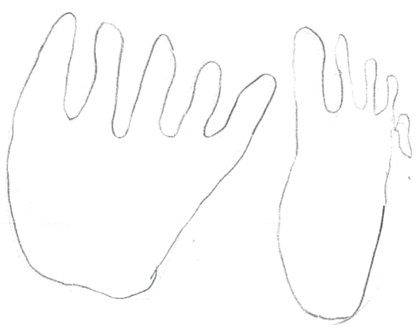
Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

SITUATION 1 :

Le problème suivant a été proposé à une classe de CP au mois de juin.

« À la récréation, Léo joue aux billes. Au début de la partie il possède 12 billes. Il gagne 9 billes. Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ? »

Voici quatre productions d'élèves :

Léanne A la récréation, Léo joue aux billes. Au début de la partie il possède 12 billes. Il gagne 9 billes. Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ?  Il y a 21 billes.	Enzo A la récréation, Léo joue aux billes. Au début de la partie il possède 12 billes. Il gagne 9 billes. Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ? 12 + 9 = 21 Il y a 21 billes
Zélie A la récréation, Léo joue aux billes. Au début de la partie il possède 12 billes. Il gagne 9 billes. Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ? Il y a 21 billes. 	Miléna A la récréation, Léo joue aux billes. Au début de la partie il possède 12 billes. Il gagne 9 billes. Combien a-t-il de billes à la fin de la partie ? $\begin{array}{r} {}^{1} \\ 12 \\ +\ 9 \\ \hline 21 \end{array}$ Il y a 21 billes.

1. Pour les productions de Léanne, Zélie et Miléna, indiquer les procédures probablement utilisées.
2. La production d'Enzo permet-elle d'évaluer la maitrise d'une procédure relevant du calcul ? Justifier la réponse.

SITUATION 2

1. Analyser les procédures mises en œuvre pour chacun des élèves de cycle 2 pour effectuer le calcul en ligne 29 + 47.

Elève A
29 + 47 = 29 + 1 + 46 = 30 + 46 = 76

Elève B
29 + 47 = 60 + 16 = 76

Elève C
29 + 47 = 69 + 7 = 76

2. Un élève de cycle 3 a écrit les opérations en ligne suivantes :

96 + 53 + 4 = 96 + 4 + 53 = 100 + 53 = 153.	(ligne a)
14 x 5 = 7 x 2 x 5 = 7 x 10 = 70	(ligne b)
6 x 12 = 6 x 10 + 2 x 10 = 60 + 12 = 72	(ligne c)

Pour chaque ligne, quelle(s) propriété(s) des opérations est/sont mise(s) en œuvre par l'élève dans la procédure de calcul ?

SITUATION 3

Un enseignant propose le problème suivant à ses élèves de cycle 3 :

> *« Sur une table, il y a un livre ouvert. Si j'ajoute le nombre indiquant le numéro de la page gauche avec celui qui indique le numéro de la page de droite, je trouve 129. À quelles pages le livre est-il ouvert ? »*

Source : Circonscription de Metz Nord - http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57metznord/spip.php?article205

Proposer deux procédures que peuvent mettre en œuvre des élèves pour résoudre ce problème.

SITUATION 4

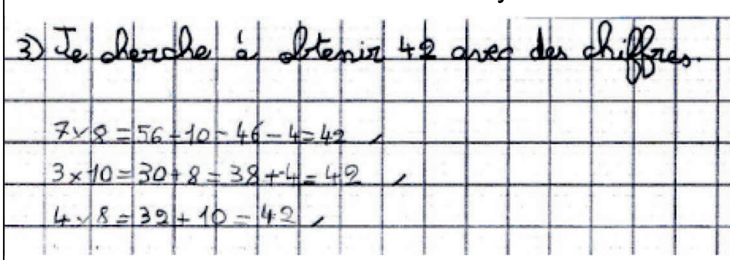
Dans une classe de CM2 un professeur propose de jouer au « Compte est bon » :

Il s'agit d'obtenir 42 en faisant des opérations avec les nombres :
8 4 7 10 3
Ceux-ci ne sont utilisés qu'une seule fois et sans que l'on soit obligé de tous les utiliser.

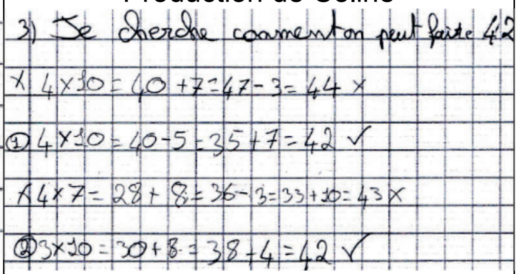
(Source : 40 problèmes ouverts, Circonscription de Metz Nord - http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57metznord/spip.php?article205)

On considère les productions de quatre élèves de la classe :

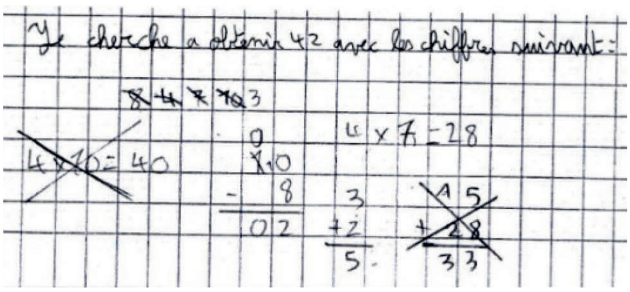
Production de Jérémy



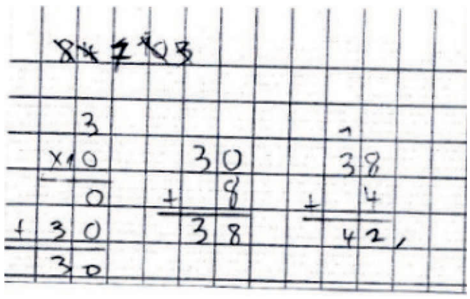
Production de Coline



Production de Swan



Production de Zoé



1. **1.** Analyser les stratégies et repérer les réussites et les éventuelles erreurs de chacun des élèves.
2. **2.** Dans les programmes de mathématiques pour le cycle 3, apparaissent les six « compétences travaillées » en mathématiques suivantes : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

   Quelles sont les compétences particulièrement travaillées au cours de cette séance d'apprentissage ? Justifier.