E3a mp 1 2019: corrigé

Exercice 1:

Q1: On a $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ donc $|u_n(x)| \leq \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ terme général de la série exponentielle qui converge pour toute valeur de α donc $\sum |u_n(x)|$ converge. On en déduit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Q2: D'après ce qui précède, $\|u_n\|_\infty \leq \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ converge donc la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Q3: Posons $v_n(x) = \dfrac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \dfrac{\left(\alpha e^{ix}\right)^n}{n!}$. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \exp\left(\alpha e^{ix}\right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(v_n(x)) = u_n(x)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) = \operatorname{Re}\left(\exp\left(\alpha e^{ix}\right)\right)$. Or $\exp\left(\alpha e^{ix}\right) = \exp\left(\alpha\cos(x) + i\alpha\sin(x)\right) = e^{\alpha\cos(x)}e^{i\alpha\sin(x)}$ donc $C(x) = e^{\alpha\cos(x)}\cos(\alpha\sin(x))$.

Q4.1: On a $J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, C(x)\, dx$ et $x \mapsto \sin(nx)\, C(x)$ est impaire car C est paire donc $J_n = 0$. On a $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \cos(nx)\, u_k(x)\, dx$. On pose $w_k(x) = \cos(nx)\, u_k(x)$. On a $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$ donc la série de fonctions $\sum w_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et les fonctions w_k sont continues. On en déduit que $I_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\, dx$. Or, $w_k(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)\cos(kx)}{k!} = \dfrac{\alpha^n}{2k!}\left(\cos(k+n)(x) + \cos(k-n)(x)\right)$ donc $\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\, dx = 0$ si $k \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x)\, dx = \dfrac{\alpha^n}{2n!}\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \dfrac{\alpha^n \pi}{n!}$ donc $I_n = \dfrac{\alpha^n \pi}{n!}$.

Q4.2: On a $J_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (car $\sum \dfrac{\alpha^n \pi}{n!}$ converge).

Q5: On a $\cos^2(nx) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ donc $\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \dfrac{\alpha^n}{2n!} + \dfrac{\alpha^n \cos(n \times 2x)}{n!}$. Or $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha^n}{2n!} = \dfrac{e^\alpha}{2}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha^n \cos(n\times 2x)}{n!} = C(2x)$ donc la série $\sum \dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ converge et $S(x) = \dfrac{e^\alpha}{2} + e^{\alpha\cos(2x)}\cos(\alpha\sin(2x))$.

Exercice 2:

Q1.1: Soit $A \in E_2$. On a $u(A) = B$ avec $B_1 = A_2$ et $B_2 = A_1$. Soit $A' \in E_2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$. On pose $A'' = \lambda A + \lambda' A'$, $u(A') = B'$ et $u(A'') = B''$. On a $B_1'' = \left(\lambda A + \lambda' A'\right)_2 = \lambda A_2 + \lambda' A_2' = \lambda B_1 + \lambda' B_1'$ et, de même, $B_2'' = \lambda B_2 + \lambda' B_2'$ donc $B'' = \lambda B + \lambda' B'$ donc u est linéaire donc endomorphisme de E_2.

Q1.2: On a $u(K_1) = K_3$, $u(K_2) = K_4$, $u(K_3) = K_1$ et $u(K_4) = K_2$ donc $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1.3: On remarque que $u^2(K_i) = K_i$ donc $u^2 = id_{E_2}$ et u est une symétrie. De plus, $u(K_1+K_3) = K_1+K_3$ et $u(K_2+K_4) = K_2+K_4$ donc $vect(K_1+K_3, K_2+K_4) \subset \ker(u - id_{E_2})$ et $u(K_1-K_3) = -(K_1-K_3)$ et $u(K_2-K_4) = -(K_2-K_4)$ donc $vect(K_1-K_3, K_2-K_4) \subset \ker(u + id_{E_2})$. Or $E_2 = \ker(u - id_{E_2}) \oplus \ker(u + id_{E_2})$ et ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension au moins 2 et la somme de leurs dimensions vaut 4 donc ils sont de dimension 2 donc $\ker(u - id_{E_2}) = vect(K_1+K_3, K_2+K_4)$ et $\ker(u + id_{E_2}) = vect(K_1-K_3, K_2-K_4)$.

Q2: Si $n = 2$, $\det(u(A)) = -\det(A)$ (interversion des colonnes). Si $n = 3$, $\det(u(A)) = |B_1, B_2, B_3| = |B_1+B_2+B_3, B_2, B_3|$. Or $B_1+B_2+B_3 = 2(A_1+A_2+A_3)$ donc $\det(u(A)) = 2 \times |A_1+A_2+A_3, B_2, B_3| = 2 \times |A_1+A_2+A_3, -A_2, -A_3|$ $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$ donc $\det(u(A)) = 2\det(A)$.

Q3: On a $\det(u(A)) = |B_1, B_2, \dots, B_n| = |B_1 + \cdots + B_n, B_2, \dots, B_n|$ et $B_1 + \cdots + B_n = (n-1)(A_1 + \cdots + A_n)$ donc $\det(u(A)) = (n-1)|A_1 + \cdots + A_n, B_2, \dots, B_n| = (n-1)|A_1 + \cdots + A_n, -A_2, \dots, -A_n|$ ($C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $2 \le j \le n$) donc $\det(u(A)) = (n-1)(-1)^{n-1}\det(A)$.

Q4.1: Soit $C_j = \sum\limits_{1 \le k \le n, k \ne j} B_k$, la $j^{ème}$ colonne de $u(u(A))$. On a $C_j = (n-1)A_j + (n-2)\sum\limits_{1 \le i \le n, i \ne j} A_i$ (car A_j est présent dans tous les B_k tandis que si $i \neq j$, A_i est présent dans tous les B_k sauf B_i donc $C_j = (n-1)A_j + (n-2)B_j$. On en déduit que $u^2(A) = (n-1)u(A) + (n-2)A$. Cette relation étant vraie pour toute A, on a $u^2 - (n-2)u - (n-1)id_E = 0$ donc $P = X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est un polynôme annulateur de u.

Q4.2: On a $P = (X+1)(X-(n-1))$ donc P admet deux racines distinctes. Le polynôme P est scindé à racines simples donc u est diagonalisable et $sp(u) \subset \{-1, n-1\}$ Le sous-espace $E_{-1}(u)$ est l'ensemble des matrices A telles que, pour tout j, $\sum\limits_{1 \le k \le n, k \ne j} A_k = -A_j$, c'est-à-dire telles que $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k = 0$ (il est donc de dimension $n^2 - n$: on peut prendre les $n-1$ premières colonnes quelconques et en déduire la dernière). Si une matrice A a toutes ses colonnes égales, alors $\sum\limits_{1 \le k \le n, k \ne j} A_k = (n-1)A_j$ donc $A \in E_{n-1}(u)$. Or l'ensemble des matrices ayant des colonnes identiques est de dimension n (on peut prendre la première colonne quelconque et en déduire les autres) donc, comme $\dim(E_{n-1}(u)) = n^2 - \dim(E_1(u)) = n$, $E_{n-1}(u)$ est l'ensemble des matrices ayant toutes leurs colonnes égales.

Q5.1: Soit $C = AU_n$. On a $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}u_{k,j}$ avec $u_{k,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } k \neq j \\ 0 \text{ si } k = j \end{cases}$ donc $c_{i,j} = \sum\limits_{1 \le k \le n, k \ne j} a_{i,k}$. On en déduit que $C_j = \sum\limits_{1 \le k \le n, k \ne j} A_k$ donc $AU_n = u(A)$.

Q5.2: On a $J_n^2 = nJ_n$ donc $U_n^2 = (J_n - I_n)^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = (n-2)J_n + I_n = (n-2)(J_n - I_n) + (n-1)I_n$ donc $U_n^2 = (n-2)U_n + (n-1)I_n$. Soit $A \in E_2$. On a $u^2(A) = u(AU_n) = AU_n^2 = A((n-2)U_n + (n-1)I_n) = (n-2)AU_n + (n-1)A$ donc $u^2(A) = (n-2)u(A) + (n-1)A$, ce qui permet de retrouver le polynôme annulateur de u.

Exercice 3:

Q1.1: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0 donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q1.2: Par le changement de variable $u = x - t$, $h(x) = \int_0^x (t+x) f(x-t)\,dt = \int_0^x (2x-u) f(u)\,du = 2x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x uf(u)\,du$ qui est de classe C^1 pour les mêmes raisons que Q1.

Q2: D'après la première question, si f est solution de $(\mathcal{P})$ alors f est dérivable. De plus, $f = 1 - h \Leftrightarrow \begin{cases} f' = -h' \\ f(0) = 1 - h(0) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\left(2\int_0^x f(u)\,du + 2xf(x) - xf(x)\right) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ donc

$$f \text{ est solution de } (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2\int_0^x f(u)\,du + xf(x) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Q3: Comme $F' = f$, on a $(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) + xF'(x) + 2F(x) = 0 : (\mathcal{E}) \\ F'(0) = 1 \end{cases}$.

Q4.1: Comme H est supposée développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle est de classe C^∞ et on peut dériver terme à terme $H''(x) + xH'(x) + 2H(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum\limits_{n=1(\to 0)}^{+\infty} na_n x^n + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n$

On en déduit (unicité du DSE) que $H''(x) + xH'(x) + 2H(x) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}$. Les conditions $H'(0) = 1$ et $H(0) = 0$ équivalent à $(a_0, a_1) = (0, 1)$.

Q4.2: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}$ et $a_0 = 0$ entraînent que $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.

On a $a_{2p+1} = \dfrac{-1}{2p} a_{2p-1} = \dfrac{-1}{2p} \dfrac{-1}{2p-2} a_{2p-3} = \dfrac{(-1)^p}{2p(2p-2) \times \cdots \times 2} a_1 = \dfrac{(-1)^p}{2^p p!}$. On en déduit que $H(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{2^p p!} x^{2p+1} = x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^p}{p!} = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. On peut noter que les équivalences dans Q4.1 permettent de dire, puisque le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$, que H est bien solution de $(\mathcal{E})$ ou vérifier que H est bien solution de $(\mathcal{E})$ par le calcul.

Q5: On a de plus$F(0) = 0$ donc f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si F est solution de $(\mathcal{E})$ et $(F(0), F'(0)) = (0, 1)$ et le théorème de Cauchy assure l'unicité d'une telle solution donc f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si $F = H$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = H'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - x^2\right)$.

Exercice 4:

Question de cours: Dans un espace euclidien E, si F est un sous-espace vectoriel, alors $F \oplus F^{\perp} = E$ donc $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$.

Q1: Soit P et Q deux éléments de E. On a $u(\lambda P + \mu Q)(x) = \int_0^1 (x+t)^n (\lambda P + \mu Q)(t)\, dt = \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t)\, dt + \mu \int_0^1 (x+t)^n Q(t)\, dt = \lambda u(P)(x) + \mu u(Q)(x)$ et cette égalité est vraie pour tout x donc $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$ donc u est linéaire. De plus, si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\, dt = \int_0^1 \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i P(t) t^{n-i} dt = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i} \int_0^1 P(t) t^{n-i} dt\right) x^i$ donc $u(P) \in E$. De plus, si $u(P) = 0$, alors $\forall i \in [[0, n]]$, $\int_0^1 P(t) t^{n-i} dt = 0 = \left(P | X^{n-i}\right)$ donc $P \in vect(1, X, \ldots, X^n)^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$ donc $\ker(u) = \{0\}$ et $u \in \mathcal{GL}(E)$ (endomorphisme de dimension finie).

Q2.1: On a $u(X^p) = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i} \int_0^1 t^{p+n-i} dt\right) X^i = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{i}}{p+n-i+1} X^i : (\mathcal{R})$ donc $(u(X^p) | X^q) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{i}}{p+n-i+1} \left(X^i | X^q\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{i}}{(p+n-i+1)(q+i+1)}$.

Q2.2: D'après la question précédente, $(u(X^q) | X^p) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{i}}{(q+n-i+1)(p+i+1)} \underset{j=n-i}{=} \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{n-j}}{(q+j+1)(p+n-j+1)} = (u(X^p) | X^q)$ car $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Soit $\phi : E \times E \to 0$ définie par $\phi(P, Q) = (u(P) | Q) - (u(Q) | P)$ est bilinéaire et $\forall (i, j) \in [[0, n]]^2$, $\phi\left(X^i, X^j\right) = 0$ donc $\phi = 0$ et donc u est un endomorphisme symétrique.

Q3: Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $Q_y = (X+y)^n$. On pose $Q_y = \sum\limits_{j=0}^{n} (Q_y | P_j) P_j$. Or $(Q_y | P_j) = \int_0^{+\infty} (t+y)^n P(t)\, dt = u(P_j)(y) = \lambda_j P_j(y)$ donc $Q_y = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) P_j$ donc $Q_y(x) = (x+y)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) P_j(x)$.

Q4: D'après $(\mathcal{R})$, les coefficients diagonaux de la matrice de u dans la base canonique sont $\dfrac{\binom{n}{p}}{n+1}$, $0 \leq p \leq n$ donc $tr(u) = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{p}}{n+1} = \dfrac{2^n}{n+1}$.

Q5.1: On a $u(Q_y)(y) = \int_0^1 (y+t)^n Q_y(t)\, dt = \int_0^1 (y+t)^{2n} dt = \dfrac{1}{2n+1} \left[(y+t)^{2n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2n+1} \left((y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right)$.

Q5.2: On a $\int_0^1 u(Q_y)(y)\, dy = \int_0^1 \dfrac{1}{2n+1} \left((y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right) dy = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)} \left[(y+1)^{2n+2} - y^{2n+2}\right]_0^1 = \dfrac{2^{2n+2} - 1}{(2n+2)(2n+1)}$. Par ailleurs $u(Q_y) = u\left(\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) P_j\right) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j^2 P_j(y) P_j$ donc $\int_0^1 u(Q_y)(y)\, dy = \int_0^1 \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j^2 P_j(y) P_j(y)\, dy = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j^2 \int_0^1 P_j(y) P_j(y)\, dy = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ car $\|P_j\| = 1$. Or $tr\left(u^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ (se placer dans une base de vecteurs propres) donc $tr\left(u^2\right) = \dfrac{2^{2n+2} - 1}{(2n+2)(2n+1)}$.