e3a MP1 2018
Un corrigé

Exercice 1

1. La fonction est définie sur $]-\infty,1[$. Au voisinage de 0, on a $\ln(1-x) = -x - x^2/2 + o(x^2)$ et donc

$$\boxed{x + \ln(1-x) = -x^2/2 + o(x^2)}$$

2. Par concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a (courbe en dessous de sa tangente en 1)

$$\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$$

En appliquant ceci pour $n \geq 2$ à $-1/n$, on obtient

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ u_n \leq 0}$$

3. D'après le développement de la question 1, $u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ est convergente}}$$

4. f est de classe C^∞ sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \geq 0$$

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0,1]}$$

5. D'après le développement de la question 1, $v_n \sim \frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n \text{ est convergente}}$$

6. On a $v_1 - u_1 = -\ln(2)$ et

$$\forall n \geq 2,\ v_n - u_n = -\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{1}{n}) = -\ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n-1}{n}) = -\ln(n+1) + 2\ln(n) - \ln(n-1)$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{N}(u_n - v_n) = -\ln(2) - \sum_{n=2}^{N}\ln(n+1) + 2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) - \sum_{n=2}^{N}\ln(n-1)$$

Les termes se simplifient et on trouve

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}(u_n - v_n) = \ln(N) - \ln(N+1)}$$

7. Avec les questions 3 et 5, les suites proposées convergent (sommes partielles de séries convergentes) et avec la question précédente, la différence vaut $-\ln(1+1/N)$ et est de limite nulle quand $N \to +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} u_n}$$

Par négativité de u_n pour $n \geq 2$ (question 2) et positivité de v_n (question 4 qui donne la positivité de f sur $[0,1]$), la suite des sommes partielles de u décroît et celle des sommes partielles de v croît. Ainsi

$$\boxed{(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes}}$$

8. En particulier
$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} v_k \leq \gamma \sum_{k=1}^{n} u_k$$
Pour $k = 1$, on trouve $\gamma \geq 1 - \ln(2) > 0$ et pour $k = 2$, $\gamma \leq 1 + u_2 < 1$.
$$\boxed{\gamma \in]0,1[}$$

9. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Une comparaison série intégrale donne alors
$$\forall n \geq 2,\ \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t}$$
On en déduit que
$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq h_n - 1 \leq \ln(n)$$
et comme $1 - \ln(2) \geq 0$,
$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)}$$
On vérifie que l'encadrement reste vrai si $n = 1$ ($\ln(2) \leq 1 \leq 1$).

10. On calcule
$$f_{n+1} - f_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) = u_{n+1} \leq 0$$
$$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

11. On reprend l'identité ci-dessus et on somme :
$$f_N - 1 = f_N - f_1 = \sum_{n=1}^{N-1} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{N} u_n - u_1 = \sum_{n=1}^{N} u_n - 1$$
$$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente et de limite } \gamma}$$

12. (a) Fonction décroissante, asymptote verticale en 0 et horizontale ($x = 0$) en $+\infty$.

    (b) Comme $r > 1$, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. Etant continue sur $[a, +\infty[$ (car $a > 0$), l'intégrale existe. Une primitive de la fonction est $x \mapsto \frac{1}{1-r}\frac{1}{x^{r-1}}$, on a
$$\boxed{I(a) = \frac{a^{1-r}}{r-1}}$$

(c) i. On applique la définition de limite avec $\varepsilon = \ell - a > 0$ ce qui donne un rang n_1.
On applique la définition de limite avec $\varepsilon = b - \ell > 0$ ce qui donne un rang n_2.
On choisit $N = \max(n_1, n_2)$ et on a pour $n \geq N$ $|n^r(w_{n+1} - w_n) - \ell| \leq \ell - a$ ET $|n^r(w_{n+1} - w_n) - \ell| \leq b - \ell$. Ainsi

$$\boxed{\forall 0 < a < \ell < b,\ \exists N / \ \forall n \geq N,\ a \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq b}$$

ii. $x \mapsto 1/x^r$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut derechef effectuer une comparaison série-intégrale pour obtenir

$$\forall n \geq N,\ \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^r} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

Avec la question précédente (en divisant par $n^r > 0$ et comme la multiplication par a ou b ne change pas le sens des inégalités)

$$a \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq \sum_{k=N}^{n} (w_{k+1} - w_k) \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

et finalement,

$$\boxed{a \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{r}}$$

iii. On a donc, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$aI(N) \leq -w_N \leq bI(N-1)$$

ou encore

$$\boxed{-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)}$$

iv. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise ce qui précède avec $a = \ell - \varepsilon$ et $b = \ell + \varepsilon$. Ceci nous donne un rang N. Tout rang plus grand que N convient aussi et

$$\forall n \geq N,\ -(\ell + \varepsilon)I(n-1) \leq w_n \leq -(\ell - \varepsilon)I(n)$$

On multiplie par $n^{r-1} \geq 0$ ce qui donne

$$\forall n \geq N,\ -(\ell + \varepsilon)I(n-1)(n-1)^{r-1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{r-1} \leq w_n n^{r-1} \leq -(\ell - \varepsilon)I(n)n^{r-1}$$

Le majorant tend vers $-(\ell - \varepsilon)\frac{1}{r-1}$ et est plus petit que $\frac{-\ell+2\varepsilon}{r-1}$ pour n assez grand.
Le majorant tend vers $-(\ell + \varepsilon)\frac{1}{r-1}$ et est plus grand que $\frac{-\ell-2\varepsilon}{r-1}$ pour n assez grand.
Il existe donc un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ -\frac{\ell}{r-1} - \frac{2\varepsilon}{r-1} \leq w_n n^{r-1} \leq -\frac{\ell}{r-1} + \frac{2\varepsilon}{r-1}$$

Par définition des limites,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n^{r-1} w_n = -\frac{\ell}{r-1}}$$

v. $\boxed{\text{Dans le cas où } \ell = 0, \text{ on peut reprendre la preuve}}$. On travaille avec $\varepsilon > 0$ et on trouve un rang à partir duquel

$$-\varepsilon \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq \varepsilon$$

On somme mais on obtient cette fois

$$-\varepsilon \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r} \leq w_{n+1} - w_N \leq \varepsilon \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

et donc

$$-\varepsilon I(N-1) \leq w_N \leq \varepsilon I(N-1)$$

On conclut alors encore que $n^{r-1} w_n \to 0$.

13. Posons $w_n = \gamma - f_n$ (à partir du rang 1). On a alors $w_n \to 0$ (question 11) et (questions 10 et 3)

$$w_{n+1} - w_n = f_n - f_{n+1} = -u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$$

Ainsi, $n^2(w_{n+1} - w_n) \to \frac{1}{2}$. La question 12 donne alors $nw_n \to -\frac{1}{2}$ et donc $w_n \sim -\frac{1}{2n}$. On a alors

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}$$

Exercice 2

1. (a) Par définition du produit matriciel, le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de AB est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de B. Ainsi

$$\boxed{({}^tMM)_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle}$$

(b) Dans le cas om la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est orthogonale, ${}^tMM$ est diagonale et son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux. Ainsi

$$\det(M)^2 = \det({}^tMM) = \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$$

Il reste à passer à la racine carrée pour conclure que

$$\boxed{|\det(M)| = \|v_1\| \|v_2\| \dots \|v_n\|}$$

2. Une matrice orthogonale est une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Ainsi les matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonales et orthogonales sont

$$\boxed{\text{les matrices diagonales à coefficients diagonaux dans } \{1, -1\}}$$

3. Une première fonction prend en argument deux listes supposées de même taille et renvoie leur produit scalaire.

```
def prodscal(U,V):
    s=0
    for i in range(len(U)):
        s=s+U[i]*V[i]
    return s
```

La fonction principale prend en argument une liste de listes. Dans une première double boucle, on vérifie que les coefficients valent tous 1 ou -1. Dans une seconde que les produits scalaires de deux colonnes différentes est nul. Si aucune interruption n'a eu lieu, on renvoie 1.

```
def estdansH(M):
    n=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if abs(M[i][j])!=1:
                return 0
    for i in range(n):
        for j in range(i+1,n):
            if prodscal(M[i],M[j])!=0:
                return 0
    return 1
```

4. (a) Tous les coefficients étant de carré égal à 1

$$\boxed{\text{Les colonnes de } M \in \mathcal{H}_n \text{ sont de norme } \sqrt{n}}$$

   (b) Le déterminant étant multilinéaire, si les v_i sont tous non nuls

$$\det(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} \|v_i\| \det(v_1/\|v_1\|, \dots, v_n/\|v_n\|)$$

   Si $(v_1, \dots, v_n)$ est orthogonale, le dernier déterminant est celui d'une matrice orthogonale (colonnes orthogonales et normées) son déterminant vaut 1 ou -1. Ainsi

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{H}_n,\ |\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}}$$

5. On a

$$\forall i \geq 1,\ 0 = \langle v_1, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}$$

   Or, la dernière somme est la différence du nombre de 1 et du nombre de -1. Ainsi

$$\boxed{\text{le nombre des } m_{j,i} \text{ égaux à 1 est égal au nombre de } m_{j,i} \text{ égaux à } -1.}$$

6. Multiplier une ligne ou ou colonne de M conserve l'appartenance à $\mathcal{H}_n$ (les produits scalaires sont inchangés ou transformés en leur opposé). En multipliant pour tout i la ligne i de $M \in \mathcal{H}_n$, on trouve un élément de $\mathcal{H}_n$ dont la première colonne est constituée uniquement de 1.
7. On suppose $\mathcal{H}_n$ non vide et on considère $M_0 \in \mathcal{H}_n$ de première colonne v_1 comme ci-dessus. En faisant le produit scalaire des deux premières colonnes, qui est nul, on voit alors que la deuxième colonne contient autant de 1 que de -1. Ainsi

$$\boxed{\text{si } \mathcal{H}_n \neq \emptyset \text{ alors } n \text{ est pair}}$$

8. (a) A toutes les colonnes, on ajoute la première. M_0 est transformée en une matrice dont les coefficients sur les colonnes $2, \dots, n$ valent 0 ou 2. Chacune de ces colonnes est factorisable par 2 et on trouve $\det(M_0) = 2^{n-1} \det(A)$ où A est une matrice dont les coefficients valent 0 ou 1 et sont donc entiers. Le déterminant étant une somme de produit des coefficients, $\det(A) \in \mathbb{Z}$. Ainsi

$$\boxed{\det(M_0) \text{ est un entier relatif multiple de } 2^{n-1}}$$

   (b) n étant pair, il s'écrit $n = 2p$ (avec $p \geq 2$ car $n > 2$). Avec 4(b) et 8(a), $(2p)^p$ est mutiple de 2^{2p+1}.
   Si, par l'absurde, p est impair alors $(2p)^p = 2^p p^p$ n'est pas factorisable par 2^{p+1} (car p^p est impair). Ainsi $p + 1 > 2p + 1$ et donc $p < 0$ ce qui est une contradiction. p est ainsi pair et donc

$$\boxed{n \text{ est un entier naturel multiple de 4}}$$

Exercice 3

1. (a) Comme il n'y a que deux variables X_1, X_2, l'ensemble des valeurs prises par ces variables est de cardinal 1 ou 2.
Le cardinal 1 est atteint quand $X_1 = X_2 = 1$ par exemple et le cardinal 2 quand $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$ ($\ell \geq 2$).

$$\boxed{U_2(\Omega) = \{1, 2\}}$$

(b) $(U_2 = 1) = (X_1 = X_2) = \bigcup_{k=1}^{\ell}(X_1 = k) \cap (X_2 = k)$. La réunion est disjointe et les variables X_1, X_2 sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(U_2 = 1) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\ell^2} = \frac{1}{\ell}$$

On en déduit $\mathbb{P}(U_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(U_1 = 1)$.

$$\boxed{\mathbb{P}(U_2 = 1) = \frac{1}{\ell} \text{ et } \mathbb{P}(U_2 = 2) = 1 - \frac{1}{\ell}}$$

(c) L'espérance vaut $\mathbb{P}(U_2 = 1) + 2\mathbb{P}(U_2 = 2)$ et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(U_2) = 2 - \frac{1}{\ell}}$$

2. (a) On écrit (pour le plaisir) une fonction plus générale prenant en argument n et ℓ. On gère une liste `liste` de booléen, la case numéro i étant un booléen indiquant si la valeur i a été prise par l'une des variables X_k (il faut donc $\ell + 1$ cases numérotés de 0 à ℓ). Il s'agit alors de compter combien de cases valent `True`.

```
def simulU(n,ell):
    liste=[False]*(ell+1)
    for i in range(n):
        liste[random.randint(1,ell)]=True
    s=0
    for x in liste:
        if x:
            s=s+1
    return s
```

(b) La loi faible des grands nombres dit que :
Si (Y_n) une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant des moments d'ordre 2 et si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $m = \mathbb{E}(Y_1)$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right|\right) = 0$$

Ainsi, pour calculer une valeur approchée de l'espérance de Y_1, on fait la moyenne sur un grand nombre d'essais des résultats obtenus.

```
def espU(n,ell):
    s=0
    for i in range(10000):
        s=s+simulU(ell,n)
    return s/(10000)
```

3. Les X_k sont à valeurs dans un ensemble à ℓ éléments et on choisit n de ces valeurs. Ainsi,

$$\boxed{U_n(\Omega) = [\![1, \min(n, \ell)]\!]}$$

4. X_i suivant une loi uniforme,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_i \in S) = \frac{|S|}{\ell}}$$

5. Les variables X_i étant indépendantes et de même loi, on a

$$\mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i \neq a) = \mathbb{P}(X_1 \neq a)^{n-1}$$

Avec la question précédente,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a) = \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}}$$

6. On utilise la formule des probabilité totales avec le système complet d'événements $(X_n = a)_{a \in [\![1,\ell]\!]}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{a=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n, X_n = a)\\ &= \sum_{a=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a, X_n = a)\end{aligned}$$

Comme les variables sont indépendantes

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{a=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a)\mathbb{P}(X_n = a)$$

Chaque terme dans la somme vaut (question précédente et définition de X_n) $\left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n-1} \frac{1}{\ell}$. En sommant, on obtient donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}}$$

7. On utilise la formule des probabilités totales avec les système complet d'événements $(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)_{S \in \mathcal{P}_\ell}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) &= \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S, X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)\\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S, X_n \notin S)\end{aligned}$$

Par lemme des coalitions, les événements $\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S$ et $X_n \notin S$ sont indépendants et donc

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)\mathbb{P}(X_n \notin S)$$

La question 4 donne alors

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1,\dots,X_{n-1}\} = S)\left(\frac{\ell - |S|}{\ell}\right)}$$

8. On a
$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \sum_{k=1}^{\min(\ell,n-1)} k\mathbb{P}(U_{n-1} = k) = \sum_{k=1}^{\ell} k\mathbb{P}(U_{n-1} = k)$$
(les termes ajoutés dans la seconde somme sont nuls).
Par ailleurs,
$$(U_{n-1} = k) = \bigcup_{S\in\mathcal{P}_\ell, |S|=k} (\{X_1,\dots,X_{n-1}\} = S)$$
La réunion ci-dessus étant disjointe,
$$\mathbb{P}(U_{n-1} = k) = \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell, |S|=k} \mathbb{P}(\{X_1,\dots,X_{n-1}\} = S)$$
On injecte dans l'expression de $\mathbb{E}(U_{n-1})$ et on réunit les sommes ensembles (ici les sommes sont finies, il n'y a pas de problème de sommabilité)
$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} |S|\mathbb{P}(\{X_1,\dots,X_{n-1}\} = S)$$
La question précédente donne
$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}(\{X_1,\dots,X_{n-1}\} = S) - \frac{1}{\ell}\sum_{S\in\mathcal{P}_\ell} |S|\mathbb{P}(\{X_1,\dots,X_{n-1}\} = S)$$
La première somme du membre de droite vaut 1 ($((\{X_1,\dots,X_{n-1}\} = S)_{S\in\mathcal{P}_\ell}$ est un système complet) et ainsi
$$\boxed{\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - \mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n))}$$

9. Il suffit de combiner les résultats des questions 5 et 8 pour obtenir
$$\boxed{\mathbb{E}(U - n) = \ell\left(1 - \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^n\right)}$$

10. A ℓ fixé, si n est très grand, on est presque sûr de trouver toutes les valeurs de $[\![1,\ell]\!]$ et l'espérance devrait être proche de ℓ. C'est bien le cas car $\frac{\ell-1}{\ell} \in [0,1[$ et sa puissance n-ième est de limite nulle quand $n \to +\infty$.
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U_n) = \ell}$$

11. A n fixé et si ℓ est très grand, il est fort probable qu'on ne tombe jamais deux fois sur la même valeur et l'espérance doit être proche de n.
C'est bien le cas car
$$\mathbb{E}(U_n) = \ell(1 - \exp(n\ln(1 - 1/\ell)))$$
Dans l'exponentielle, le terme équivaut à $-n/\ell$ et est de limite nulle. Ainsi (quand $\ell \to +\infty$)
$$1 - \exp(n\ln(1 - 1/\ell)) \sim n\ln(1 - 1/\ell) \sim \frac{n}{\ell}$$
et ainsi $\mathbb{E}(U_n) \to n$.

$$\boxed{\lim_{\ell \to +\infty} \mathbb{E}(U_n) = n}$$

12. (a) Ici, on considère qu'il y a n individus et on note X_k son jour de naissance (un nombre entre 1 et 365). D_n est le nombre des valeurs prises par les X_k. On en dans le cadre de l'exercice avec $\ell = 365$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(D_n) = 365\left(1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n\right)}$$

(b) On a alors

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(D_n) = 365}$$