Sujet

Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\, q^k$$

où $p \in]\,0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.

2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

Exercice 2.

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose : $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$ où $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

1. Montrer que pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$

3. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.1. Etudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.

3.2. Démontrer que la fonction φ est continue sur J.

4.

4.1. Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{ch}}$.
On pourra utiliser un changement de variables.

4.2. En déduire l'intégrabilité de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.

Exercice 3.

Questions de cours

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note r_1 et r_2 les racines.
Donner sans démonstration les expressions de $\sigma_1 = r_1 + r_2$ et de $\sigma_2 = r_1 r_2$ à l'aide des coefficients a, b et c.

2. Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$

On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n.
On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1.

* * * * * *

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E.
On définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall\, x \in \mathscr{C},\ S(x) = z, \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall\, x \in \mathscr{C},\ T(x) = y, \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.

4. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même pour S.

5. Soient $F = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.

6. <u>Etude de l'endomorphisme S</u>.
Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

7. <u>Etude de l'endomorphisme T</u>.
On rappelle qu'une suite x est dans $\mathscr{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

7.1. Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ où $0_{\mathscr{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{C}$.
On pourra utiliser les questions de cours.

7.2. L'endomorphisme T est-il injectif ?

7.3. Déterminer $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $\mathrm{Ker}(T + 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.

7.4. Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T.

8. On munit $\mathscr{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathscr{C}$, $\|x\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

Soit N l'application qui à tout élément x de $\mathscr{C}$, associe $N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.

8.1. Vérifier que pour tout x de $\mathscr{C}$, $N(x)$ existe.

8.2. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathscr{C}$.

8.3. Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}, N)$. Est-elle continue ?

8.4. Prouver que dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.

8.5. Les deux normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 4.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose, pour tout couple $(P, Q) \in E^2$,

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur E un produit scalaire.
Dans la suite de l'exercice, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ce produit scalaire.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Donner sans démonstration la dimension de $F^\perp$.

3. On prend dans cette question $n = 2$.
Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.

4. n revient au cas général : $n \geqslant 2$ et soit $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ non nul.

4.1. Déterminer le degré de L.

4.2. On pose, lorsque cela est possible, pour x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t)\, t^x\,\mathrm{d}t$.

4.2.1. Montrer que φ est une fonction rationnelle.

4.2.2. Déterminer les zéros et les pôles de φ. Donner pour chacun son ordre de multiplicité.
On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ.

4.2.3. En déduire une expression de φ à une constante multiplicative près faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.

4.3. En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle φ, donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.

Exercice 5.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[\,0,1]$ la fonction en escalier f_n par :

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!],\ \forall\, t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[,\ f_n(t) = w_k \quad \text{et} \quad f_n(1) = w_n$$

1. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Prouver que l'on a pour tout $t \in [\,0,1[$, $f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

3. En déduire pour tout $t \in [\,0,1]$, la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

4. Prouver alors que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \ell$.

* * * * * *

Correction de l'épreuve

Exercice 1.
Etude d'un couple de variables aléatoires indépendantes par application directe du cours

1. Pour que les formules données définissent bien une loi de probabilité, il suffit de prouver d'après le cours que :
- $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) \geqslant 0$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$

-> Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = p\,q^k \geqslant 0$, et que comme $p \in]0,1[$, $q = 1 - p \in]0,1[$.
-> La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} q^k$ converge car c'est une série géométrique de raison $q = 1-p$ telle que $|q| < 1$, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p\,q^k = p\,\frac{1}{1-q} = 1.$

On a bien défini une loi de probabilité.

2. On sait que si elle existe, l'espérance de la variable aléatoire X s'écrit : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X = k)$.

Il s'agit donc d'étudier la convergence et de calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\,p\,q^k = p\,q \sum_{k=1}^{+\infty} k\,q^{k-1}$.

La série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0} x^k$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\dfrac{1}{1-x}$. Elle est donc dérivable (et même de classe C^∞) sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ainsi, comme $q \in]0,1[$ (et donc $|q| < 1$), la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} kq^k$ converge et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kpq^k = pq \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{pq}{(1-q)^2}.$$

Comme $1 - q = p$, $\boxed{E(X) = \dfrac{q}{p}}$

3. On cherche à définir l'évènement$(X = Y)$ à l'aide d'évènements connus :
$\displaystyle(X = Y) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X = k) \cap (Y = k)$, la réunion étant disjointe.

Comme X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 (q^2)^k \\ &= p^2 \frac{1}{1-q^2}\end{aligned}$$

et finalement : $\boxed{\mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{p}{1+q}}$.

On remarque que pour tous $k, j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}((X=k)\cap(Y=j)) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=j) = \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}((X=j)\cap(Y=k)).$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X>Y) = \mathbb{P}(Y>X)$.
Comme les trois évènements $(X>Y), (X<Y)$ et $(X=Y)$ forment un système complet d'évènements, on peut écrire :

$$1 = \mathbb{P}(X>Y) + \mathbb{P}(X=Y) + \mathbb{P}(X<Y) = 2\mathbb{P}(X<Y) + \mathbb{P}(X=Y).$$

D'où : $\boxed{\mathbb{P}(X<Y) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{p}{1+q}\right) = \dfrac{1-p}{1+q}}$

4. La première des choses à faire est de déterminer $S(\Omega)$: $S(\Omega) = \mathbb{N}$.
On cherche maintenant à déterminer $\mathbb{P}(S=k)$ pour tout k de $\mathbb{N}$.
Soit donc $k \in \mathbb{N}$.
L'évènement $(S=k)$ se décompose à l'aide des deux v.a. X et Y en : $(X=j)\cap(Y=k-j)$
Ainsi, en utilisant l'indépendance des deux variables aléatoires X et Y, il vient :

$$\mathbb{P}(S=k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j) = p^2 \sum_{j=0}^{k} q^k.$$

D'où : $\boxed{\mathbb{P}(S=k) = (k+1)\, p^2\, q^k}$

Exercice 2.

Etude d'une fonction définie par un produit infini, en utilisant les séries numériques.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait (variations de la fonction ch) que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{k}\right) \geq 1$.
Il en résulte que la suite $(P_n(x))$ est toujours strictement positive et ne s'annule jamais.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq 1.$$

$\boxed{\text{La suite } (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$.

• A noter que l'on a étudié le quotient $\dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ après avoir bien vérifié que $P_n(x)$ ne s'annulait jamais.
• On aurait aussi pu étudier la différence $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ et le même argument (ch > 1) aurait donné le résultat.

2. Comme on l'au vu dans la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(x) > 0$.
En suivant les indications de l'énoncé on calcule $\ln(P_n(x))$, ce qui est maintenant légitime :

$$\ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\text{ch}\left(\frac{x}{k}\right))$$

Tout revient donc à étufier la série de terme général $v_k = \ln\left(\text{ch}\left(\dfrac{x}{k}\right)\right)$
Pour ce faire, cherchons un équivalent de v_k au voisinage de l'infini en utilisant les DL :
On sait tout d'abord que lorsque t tend vers 0,

$$\text{ch}(t) = \frac{1 + t + \frac{t^2}{2} + 1 - t + \frac{t^2}{2}}{2} + o(t^2) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Ainsi $\ln(\text{ch}(t)) = \ln(1 + (\text{ch}(t) - 1)) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
Lorsque $k \to +\infty$, $\dfrac{x}{k} \to 0$ et en utilisant l'équivalent précédent : $\ln\left(\text{ch}\left(\frac{x}{k}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2k^2}$.
Or on sait (cours) que la série de terme général $\dfrac{x^2}{2k^2}$ est convergente.

Il en résulte que la série de terme général v_n converge et donc que la suite $\ln(P_n(x))$ (suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$) converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Par suite, la fonction exp étant continue, on en déduit que la suite $P_n(x)$ converge pour tout x non nul.

Puis, pour $x = 0$, $P_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ la suite } (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ et $\boxed{J = \mathbb{R}}$

33.1. Soit $x \in J = \mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = P_n(-x)$ car ch est paire. Ainsi, en passant l'égalité à la limite, on obtient $\varphi(x) = \varphi(-x)$: $\boxed{\varphi \text{ est paire}}$

Soient x et y deux réels négatifs ou nuls tels que $x \leq y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) \geq P_n(y)$ car la fonction ch est décroissante et positive sur $]-\infty, 0]$.
En passant à la limite, $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ et donc $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur }]-\infty, 0]}$

De même, comme ch est croissante sur $[0, \infty[$, $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } [0, +\infty[}$.

3.2. N'ayant dans le cours aucun résultat sur les produits infinis, on va travailler avec la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(P_n(x))$ en démontrant qu'elle est normalement convergente sur tout segment $[-A, A]$ avec $A \in \mathbb{R}_+$.

• Chaque fonction $x \mapsto \ln\left(\text{ch}\left(\dfrac{x}{k}\right)\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Montrons que la série $\sum_{k\geq 1} \ln\left(\text{ch}\left(\dfrac{x}{k}\right)\right)$ converge normalement sur tout segment $[-A, A]$ avec $A \in \mathbb{R}^+$:

Pour tout $x \in [-A, A]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$0 \leq \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)\right) = \ln\left(1 + \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right) - 1\right) \leq \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right) - 1 \leq \operatorname{ch}\left(\frac{A}{k}\right) - 1$$

et

$$\operatorname{ch}\left(\frac{A}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{A^2}{2k^2}$$

Remarquons que l'on a utilisé l'inégalité classique, valable pour tout réel $u > -1$: $\ln(1+u) \leqslant u$.

Or, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{A^2}{2k^2}$ est convergente (Riemann).

Il en résulte que la série $\sum_{k\geq 1} \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)\right)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[-A, A]$ $(A > 0)$, et par suite, sa somme $\ln \circ \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Enfin, la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ entraîne la continuité de φ : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

44.1. • Intégrabilité de la fonction $t \mapsto 1/\operatorname{ch}(t)$:

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(t) \geq 1$.

De plus,

— lorsque t tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \sim \dfrac{2}{\mathrm{e}^t}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$;

— lorsque t tend vers $-\infty$, $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \sim \dfrac{2}{\mathrm{e}^{-t}}$ qui est intégrable sur $]-\infty, 0]$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$ existe et comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est positive, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Calcul de l'intégrale : En effectuant le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$ (fonction exp de classe C^1 et strictement croissante), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^2} du \\ &= 2[\arctan(u)]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

soit : $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\operatorname{ch}} = \pi}$

4.2. On va utiliser la question précédente :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n(x) \geq P_1(x) = \operatorname{ch}(x) > 0$ et donc $0 < \dfrac{1}{P_n(x)} \leq \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

En passant à la limite, on obtient alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \dfrac{1}{\varphi(x)} \leq \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

Enfin, comme φ est continue et positive et comme $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\boxed{\dfrac{1}{\varphi} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$

Exercice 3.
Etude algébrique et topologique de deux endomorphismes de l'espace des familles convergentes indexées par $\mathbb{Z}$

Questions de cours

1. Question très simple que l'on retrouve en calculant les racines si l'on a oublié le résultat : $\boxed{\sigma_1 = r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}}$ et $\boxed{\sigma_2 = r_1 r_2 = \frac{c}{a}}$

2. Rappelons que l'équation caractéristique associée à cette suite s'écrit : $r^2 - ar - b$ et que l'on note r_1 et r_2 ses racines.

Alors, pour tout entier naturel n, on a :

— Si r_1 et r_2 sont réelles et distinctes : $\boxed{u_n = Ar_1^n + Br_2^n}$.

— Si $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\omega}$ et $r_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\omega}$ sont des racines complexes conjuguées distinctes : $\boxed{u_n = Ar^n\cos(\omega n) + Br^n\sin(\omega n}$

— Si $r_1 = r_2$: $\boxed{u_n = (A + Bn)r^n}$.

* * * * * *

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $u_0 = 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un élément de $\mathscr{C}$.

2. — D'après la question précédente, $\mathscr{C}$ est non vide.

— Soit (x_n) et (y_n) deux éléments de $\mathscr{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les suites $(\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda x_{-n} + y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Donc $\lambda(x_n) + (y_n) \in \mathscr{C}$.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C} \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } E}$.

3. Rappelons un résultat de cours : toute suite convergente est bornée.

Soit $x \in \mathscr{C}$.
Alors comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, elle sont bornées : ainsi, il existe $(M, M') \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leq M \quad \text{et} \quad |x_{-n}| \leq M'.$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq \max(M, M')$ et $\boxed{\text{la suite } x \text{ est bornée}}$.

4. • Montrons d'abord que T est linéaire :
Soient $x, x' \in \mathscr{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $y = T(x)$, $y' = T(x')$ et $z = T(\lambda x + x')$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = x_{n-1} + x_{n+1}, \quad y'_n = x'_{n-1} + x'_{n+1} \quad \text{et} \quad z'_n = (\lambda x + x')_{n-1} + (\lambda x + x')_{n+1}.$$

On a donc bien $T(\lambda x + x') = \lambda T(x) + T(x')$. L'application $\boxed{T \text{ est linéaire}}$.

Montrons maintenant que T est une application de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$:

Soit $x \in \mathscr{C}$ et $y = T(x)$. Comme les suites $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, elles convergent. Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
De même $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi et donc, $y \in \mathscr{C}$. Ainsi, $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}}$.

5. • Première méthode : on remarque que $F = \ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $G = \ker(S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ qui sont donc les sous espaces propres de S associés aux valeurs propres 1 et -1. $\boxed{\text{Ils sont donc en somme directe}}$.

• Deuxième méthode : on peut aussi démontrer directement que $F \cap G = \{\theta\}$ (suite nulle).

Prouvons maintenant que $F \oplus G = \mathscr{C}$.

Soit donc $y \in \mathscr{C}$. On peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $y_n = \dfrac{y_n + y_{-n}}{2} + \dfrac{y_n - y_{-n}}{2}$.

Or, la suite $\left(\dfrac{y_n + y_{-n}}{2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans F et la suite $\left(\dfrac{y_n - y_{-n}}{2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans G et donc, $F+G = \mathscr{C}$

Conclusion : $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont donc supplémentaires dans } \mathscr{C}}$.

6. Soit $x \in \mathscr{C}$. Notons $z = S(x)$ et $y = S(z)$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z_n = x_{-n}$ et $y_n = z_{-n}$, donc $y_n = x_n$.
Ainsi, $S \circ S = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, et S est une symétrie de $\mathscr{C}$.
D'après la question précédente, c'est $\boxed{\text{la symétrie par rapport à } F \text{ et parallèlement à } G}$.

77.1. Soit λ un réel et $x \in \ker(T - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$.
La suite $u = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire à deux termes.
Son équation caractéristique est $r^2 - \lambda r + 1 = 0$ dont le discriminant est $\lambda^2 - 4$ et on note r_1 et r_2 ses racines dans $\mathbb{C}$.

Il en est de même pour la suite $v = (x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec la même équation caractéristique.

D'après les questions de cours :

— Si $|\lambda| > 2$, il existe A, B, A' et B' réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$ et $x_{-n} = A'r_1^n + B'r_2^n$.

De plus, $r_1 + r_2 = \lambda$ et $r_1 r_2 = 1$.

Ainsi, les deux racines réelles ont le même signe et soit $|r_1| < 1$ et $|r_2| > 1$, soit $|r_2| < 1$ et $|r_1| > 1$.
Par symétrie, supposons que $|r_1| > 1$ et $|r_2| < 1$.
Alors, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge que si $A = 0$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge que si $A' = 0$.
Dans ce cas, en prenant $n = 0$, on a $B = B'$, et comme $\lambda x_0 = x_1 + x_{-1}$, $\lambda B = (B + B')r_2$.
D'où $B(\lambda - 2r_2) = 0$. Or, $r_2 \neq \dfrac{\lambda}{2}$, donc $B = B' = 0$. Ainsi, $x = 0_{\mathscr{C}}$.

— Si $|\lambda| < 2$, alors il existe A, B, A' et B' réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$x_n = Ar^n\cos(n\omega) + Br^n\sin(n\omega)$ et $x_{-n} = A'r^n\cos(n\omega) + B'r^n\sin(n\omega)$, où $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\omega}$ et $r_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\omega}$.

Comme, $r_1 r_2 = 1$, on a : $r = 1$.

On peut aussi dire qu'il existe C, C' et φ, φ' réels tels que
$x_n = C\cos(n\omega + \varphi)$ et $x_{-n} = C'\cos(n\omega + \varphi')$.
Ainsi, les deux suites convergent ssi $C = C' = 0$ et donc, $x = 0_{\mathscr{C}}$.

Dans les deux cas, on trouve $\boxed{\ker(T - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}}$

Nous avons utilisé, pour conclure, que les suites $(\cos(nt)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont en général pas de limite. (Pourquoi en général ?)

7.2. $\boxed{T \text{ est injectif}}$ car $\ker(T) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ d'après la question précédente.

7.3. — Soit $x \in \ker(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.

x est une suite récurrente linéaire à d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui a pour seule racine 1.
D'après les questions de cours, il existe A, A', B, B' des réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = A + Bn$ et $x_{-n} = A' + B'n$. Comme les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on a $B = B' = 0$. En évaluant en $n = 0$, $A = A'$. Ainsi, x est une suite constante.

Réciproquement, on vérifie que $\boxed{\ker(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{x \in \mathscr{C}, x \text{ est constante}\}}$

— Soit $x \in \ker(T + 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. x est encore une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ et qui a pour seule racine -1.
D'après les questions de cours, il existe A, A', B, B' des réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (A + Bn)(-1)^n$ et $x_{-n} = (A' + B'n)(-1)^n$.
Comme les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on a $A = A' = B = B' = 0$ et donc, x est nulle.

On en déduit que $\boxed{\ker(T + 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}}$

7.4. Conclusion : La seule valeur propre réelle de T est 2.

88.1. Soit $x \in \mathscr{C}$.
Il s'agit de montrer que la série définissant $N(x)$ converge.
D'après la question 3, la suite x est bornée.
Il existe donc un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq M$ et $|x_{-n}| \leq M$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dfrac{|x_n| + |x_{-n}|}{2} \leq \dfrac{M}{2^{n-1}}$ qui est le terme général d'une série convergente.
Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2}$ converge (Théorème de comparaison) et par suite $\boxed{N(x) \text{ existe}}$

8.2. On sait maintenant que pour tout x de $\mathscr{C}$, $N(x)$ existe. Il reste à démontrer les 3 propriétés définissant une norme.

— Soient $x \in \mathscr{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$N(\lambda x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda x_n| + |\lambda x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| N(x).$$

Donc N est homogène.

— Soit $x \in \mathscr{C}$ tel que $N(x) = 0$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} \geq 0$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| = 0$ et $|x_{-n}| = 0$: la suite x est nulle.

Ainsi, $N(x) = 0 \Longrightarrow x = \theta$ (suite nulle)

— Soit $(x, y) \in \mathscr{C}^2$:

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n + y_n| + |x_{-n} + y_{-n}|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |y_n| + |x_{-n}| + |y_{-n}|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n} \\ &\leq N(x) + N(y). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité triangulaire.

Conclusion : $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathscr{C}}$.

8.3. Soit $x \in \mathscr{C}$ et $y = S(x)$:

$$\begin{aligned} N(S(x)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_{-n}| + |x_n|}{2^n} \\ &= N(x). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S \text{ conserve la norme}}$. On dit encore que $\boxed{S \text{ est une isométrie}}$

D'après le cours, Une isométrie est toujours continue, donc $\boxed{S \text{ est continue}}$

8.4. Les applications $S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ et $S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ sont continues d'après la question précédente.
Or $F = (S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}})^{-1}(\{0_{\mathscr{C}}\})$ et $G = (S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})^{-1}(\{0_{\mathscr{C}}\})$.
Comme $\{0_{\mathscr{C}}\}$ est un fermé de $(\mathscr{C}, N)$, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont fermés dans } (\mathscr{C}, N)}$ comme images réciproques de fermés par une application continue.

8.5. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{k,n} = 1$ si $k = n$ et $= 0$ sinon.
Alors $N(x_k) = \dfrac{1}{2^k}$, donc la suite (x_k) converge vers $0_{\mathscr{C}}$ avec la norme N.
Mais, $\|x_k\|_\infty = 1$, donc la suite (x_k) ne converge pas vers $0_{\mathscr{C}}$ avec la norme $\|\|_\infty$.

Ainsi, $\boxed{\text{les deux normes ne sont pas équivalentes}}$

Exercice 4.
Etude d'un produit scalaire et manipulation de fractions rationnelles

Il est souhaitable dans cet exercice d'être rigoureux dans les manipulations de zéros de polynômes et de pôles de fractions rationnelles

1. — Notons d'abord que pour tout couple (P,Q) d'éléments de E, $< P,Q >$ existe puisque P et Q sont des fonctions continues sur $[0,1]$.

On rappelle qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Pour simplifier les calculs, on commence en général par démontrer la symétrie.

Symétrie : Soient P et Q dans E.

$< P,Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt = \int_0^1 Q(t)P(t)dt =< Q,P >$, donc $<,>$ est symétrique.

— Bilinéarité : Soient P,Q,R dans E et λ un réel,

$$< \lambda P+Q,R >= \int_0^1 (\lambda P(t)+Q(t))R(t)dt = \lambda \int_0^1 P(t)R(t)dt+\int_0^1 Q(t)R(t)dt = \lambda < P,R > + < Q,R >$$

et $<,>$ est linéaire à gauche. Par symétrie, on récupère la bilinéarité.

— Positivité : soit $P \in E$. Alors

$$< P,P >= \int_0^1 (P(t))^2 dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale.

— Défini : soit $P \in E$ tel que : $< P,P >= \displaystyle\int_0^1 (P(t))^2 dt = 0$. Comme $t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive, l'intégrale est nulle ssi $P^2 = 0$ sur $[0,1]$.

Mais, comme P est un polynôme, si P^2 s'annule sur $[0,1]$ alors P possède une infinité de racines ce qui prouve que P est le polynôme nul.

Conclusion : $\boxed{<,> \text{ est bien un produit scalaire sur } E}$

2. D'après le cours : $\boxed{\dim F^\perp = \dim E - \dim F = n+1-p}$.

3. On sait que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.
Comme $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension 2, $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$ est de dimension 1.
Il suffit donc de trouver un vecteur $P \in E$ non nul orthogonal $\mathbb{R}_1[X]$, i.e. tel que :
$< P,1 >=< P,X >= 0$
Comme $P \in E$, il existe 3 réels a, b et c tels que : $P = aX^2 + bX + c$
Ainsi les conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} < P,1 >= \displaystyle\int_0^1 (at^2+bt+c)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c = 0 \\ < P,X >= \displaystyle\int_0^1 (at^3+bt^2+ct)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2} = 0 \end{cases}$$

On résout donc le système d'inconnues a, b et c :

$$\begin{cases} 2a+3b+6c=0 \\ 3a+4b+6c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+3b+6c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6c=-b \\ a=-b \end{cases}$$

Ainsi, en prenant par exemple $a = 6$, le polynôme $\boxed{6X^2-6X+1}$ est une base de $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.

44.1. Comme $L \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $L \neq 0$), $\deg L = n$.

4.2.1. Soit J l'ensemble de définition de φ et soit $x \in J$. Notons $L = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Alors :
$$\varphi(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^{k+x} \right) dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\int_0^1 t^{k+x} dt \right).$$

On remarque que si $x > -1$, toutes les intégrales sont bien définies et : $\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x+k+1}}$.

Ainsi, φ est bien une fraction rationnelle.

4.2.2. On réécrit φ en mettant tout au même dénominateur :

$$\varphi = d\,\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (X+i+1) \right)}{\prod_{k=0}^{n} (X+k+1)}$$

Ainsi, le dénominateur de φ est de degré $n+1$ et ses racines sont $\{-(n+1), -n, \dots, -1\}$.
Le numérateur est de degré au maximum n.
De plus, pour tout $x \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\varphi(x) = \int_0^1 L(t) t^x dt = 0$ car $x > -1$ et L est orthogonal à tous les polynômes de degrés plus petit que $n-1$.
Ainsi, le numérateur de φ est de degré n et ses racines sont $\{0, 1, \dots, n-1\}$ et sont simples.
En conclusion, $\boxed{\text{les zéros de } \varphi \text{ sont } 0, 1, \dots, n-1}$ et sont simples et $\boxed{\text{ses pôles sont } -(n+1), -n, \dots, -1}$ et sont simples.

4.2.3. On a donc : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\varphi = \lambda \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (X-k)}{\prod_{k=1}^{n+1} (X+k)}}$

4.3. Comme $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$ est de dimension 1, il suffit de trouver les coefficients d'un polynôme L non nul de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$, c'est-à-dire de déterminer les coefficients a_k précédents.

En utilisant les résultats obtenus dans les questions précédentes, on peut écrire :

$$\lambda \prod_{k=0}^{n-1} (X-k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (X+i+1) \right)$$

Prenons $j \in \{0, \dots, n\}$. On évalue pour $X = -(j+1)$, on obtient :

$$a_j = \lambda \frac{(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (j+k+1)}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (i-j)} = \lambda\, (-1)^n \frac{\frac{(n+j)!}{j!}}{(n-j)! \prod_{i=0}^{j-1} (i-j)} = \lambda\, (-1)^{n-j} \frac{(n+j)!}{(j!)^2 (n-j)!}.$$

Donc $\boxed{a_j = \lambda (-1)^{n-j} \binom{n+j}{j} \binom{n}{j}}$.

En prenant $\lambda = 1$, on obtient les coeficients d'un polynôme non nul dans $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.

Exercice 5.
Preuve du Théorème de Césaro en utilisant une suite de fonctions.

1. Facilement (il suffit de faire un dessin), on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(t)dt &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f_n(t)dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} w_k\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k}$

2. Soit $t \in [0,1[$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{k-1}{n} \leq t < \frac{k}{n} &\iff k-1 \leq nt < k \\ &\iff k = \lfloor nt \rfloor + 1\end{aligned}$$

Ainsi, comme $t \in \left[\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}, \frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n}\right[$, $f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ par définition de f_n.

3. Soit $t \in]0,1[$. Alors, $\boxed{f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1} \underset{n \to +\infty}{\to} \ell}$ car $\lfloor nt \rfloor \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$.

Si $t = 0$, alors $f_n(0) = w_1$, donc $\boxed{f_n(0) \text{ converge vers } w_1}$.

Si $t = 1$, alors $f_n(1) = w_n$, donc $\boxed{f_n(1) \text{ converge vers } \ell}$.

4. — La suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \ell$ si $t \neq 0$ et $f(0) = w_1$.

— La fonction f est continue par morceaux de même que les fonctions f_n.

— Comme la suite (w_n) converge, elle est bornée : soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, |w_n| \leq M$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], |f_n(t)| \leq M$. La fonction constante est intégrable sur $[0,1]$.

D'après le Théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \ell}$$

* * * * * *

FIN