Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes sur des espaces vectoriels réels construits à l'aide de formes linéaires.
On rappelle qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel et tout entier $p \geq 1$, on note f^p l'endomorphisme composé $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$.
Les deux premières parties sont consacrées à deux exemples et les deux suivantes à une étude théorique de tels endomorphismes. Les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles.
L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique et d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. À tout point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, on associe le vecteur colonne

$$X_M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tournez la page S.V.P.

Première partie

On considère la matrice $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ainsi que la surface

$$S = \{M \in \mathbb{R}^3 \,/\, {}^tX_M A X_M = 0\}.$$

On notera f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

1. Vérifier qu'une équation de S dans $\mathcal{R}$ est

$$(2\,x - 2\,y - z)\,(x + 2\,y - 2\,z) = 0$$

et en déduire que S est la réunion de deux plans perpendiculaires.

2. On se propose dans cette question de retrouver la nature de S par une autre approche. On considère les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(1,2,-2), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3}(2,1,2), \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3}(2,-2,-1).$$

(a) Vérifier que $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ puis calculer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$.

(b) En déduire que A est semblable à la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et justifier qu'il existe une matrice orthogonale P, que l'on précisera, telle que $U = P^{-1}AP$.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(d) Soit M un point de l'espace. On note X'_M le vecteur colonne de ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{C})$.

(i) Écrire X_M en fonction de P et X'_M.

(ii) En déduire qu'un point M de coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$ appartient à S si et seulement si $x'z' = 0$ et retrouver la nature géométrique de S.

3. (a) Déterminer le rang de f et calculer $f \circ f$.

(b) Déterminer une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{R}^3$ et un vecteur $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad f(\vec{v}) = \phi(\vec{v})\vec{c}.$$

Deuxième partie

On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme

$$u_0 = -1, \quad v_0 = 2, \quad w_0 = -1$$

et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} & = & -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} & = & \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n). \end{array} \right.$$

1. (a) Exprimer $v_{n+1} + 2w_{n+1}$ en fonction de $v_n + 2w_n$ et en déduire que $v_n = -2w_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

(b) En déduire que $u_n = -3w_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

(c) En déduire, pour $n \geq 1$, les expressions de w_n, u_n et v_n en fonction de n uniquement puis prouver la convergence de ces trois suites.

2. On se propose dans cette question de retrouver les limites de ces suites par une autre approche.

(a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n.$$

(b) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}MP$ et préciser D et P.

(c) Retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) en posant $Y_n = P^{-1}X_n$.

Troisième partie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$; on fixe un vecteur $\vec{a}$ non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E qui n'est pas la forme linéaire nulle. On considère enfin l'application f définie sur E par

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = u(\vec{x})\vec{a}.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et préciser son rang.
2. (a) Vérifier que 0 est une valeur propre de f et exprimer son sous-espace propre associé à l'aide de $\operatorname{Ker} u$.
   (b) On suppose que λ est une valeur propre non nulle de f et que $\vec{x}$ est un vecteur propre associé. Montrer que $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{a}$ et que $\lambda = u(\vec{a})$.
   (c) En déduire, en distinguant les cas $u(\vec{a}) = 0$ et $u(\vec{a}) \neq 0$, toutes les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
   (d) Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur $u(\vec{a})$ pour que f soit diagonalisable.
3. On adopte un autre point de vue pour étudier la diagonalisation de f.
   (a) Pour tout $\vec{x} \in E$ et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, démontrer que
   $$f^p(\vec{x}) = u(\vec{x})(u(\vec{a}))^{p-1}\vec{a}.$$
   (b) Énoncer précisément la caractérisation des endomorphismes diagonalisables en termes de polynôme annulateur.
   (c) On suppose que $u(\vec{a}) = 0$. Vérifier que $f^2 = O$ (endomorphisme nul) et en déduire que f n'est pas diagonalisable.
   (d) On suppose $u(\vec{a}) \neq 0$. Trouver un polynôme annulateur de f et en déduire que f est diagonalisable.

On considère à présent un endomorphisme g de E de rang 1.

4. Démontrer qu'il existe un vecteur non nul $\vec{b}$ et une forme linéaire v sur E, qui n'est pas la forme linéaire nulle, tels que
$$\forall \vec{x} \in E, \quad g(\vec{x}) = v(\vec{x})\vec{b}.$$
5. On suppose que $g^2 \neq O$ (endomorphisme nul). Montrer que g est diagonalisable et qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice la matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}.$$
6. On suppose que $g^2 = 0$ et on considère un vecteur $\vec{e}_n$ tel que $g(\vec{e}_n) \neq 0$.
   (a) Énoncer le théorème de la base incomplète.

(b) Justifier l'existence de vecteurs $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ tels que $(g(\vec{e}_n), \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ soit une base de $\operatorname{Ker} g$.

(c) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Déduire des questions **5** et **6** que deux matrices carrées de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Quatrième partie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension infinie ou de dimension finie $n \geq 2$. On fixe un vecteur $\vec{a}$ non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E. On considère l'application h définie sur E par

$$\forall \vec{x} \in E, \quad h(\vec{x}) = u(\vec{a})\vec{x} - u(\vec{x})\vec{a}$$

et on supposera $u(\vec{a}) \neq 0$.

1. Démontrer que $\operatorname{Ker} h$ est la droite vectorielle dirigée par $\vec{a}$ puis démontrer que $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} u$.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de h. On suppose, dans cette question seulement, que E est de dimension finie $n \geq 2$; l'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

3. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $\vec{x} \in E$,

$$h^p(\vec{x}) = (u(\vec{a}))^{p-1} h(\vec{x}).$$

4. L'espace vectoriel E est muni d'une norme $\| \ \|$ et l'on suppose que $|u(\vec{a})| < 1$. Montrer que

$$\left\| h^p(\vec{x}) \right\| \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. *Applications.*

(a) Soit f une fonction définie et continue sur $[0, \pi]$, à valeurs réelles. On considère la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ par

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f_{p+1}(t) = \frac{2}{3} f_p(t) - \sin 3t \int_0^{\pi} f_p(s) ds.$$

Démontrer que pour tout $t \in [0, \pi]$, $f_p(t) \to 0$ lorsque $p \to +\infty$.

(b) En considérant le vecteur $\vec{a} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ et et la forme linéaire $h : (x, y, z) \mapsto x - y + z$, retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) de la partie II.