11PC07

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

EXERCICE 1

On considère ici l'espace vectoriel réel $E = M_4(\mathbb{R})$ muni de ses lois usuelles, et qui est aussi muni du produit matriciel noté $\times$.

On notera $G = GL_4(\mathbb{R}) = \{M \in E \ / \ det(M) \neq 0\}$ le groupe (pour $\times$) des matrices de E inversibles.

Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on notera $diag(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ (matrice diagonale de E), $\mathbf{O} = diag(0,0,0,0)$ la matrice nulle, et $\mathbf{I} = diag(1,1,1,1)$ la matrice unité.

On s'intéresse ici à certains sous-espaces vectoriels de E stables pour $\times$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

$\boxed{\textbf{1)}}$ Soit $K \in E$, dont tous les coefficients valent 1.

(i) Calculer K^2 et déterminer un polynôme réel P de degré 2 annulateur de K: tel que $P(K) = \mathbf{O}$. Quelles sont les valeurs propres de K ?

(ii) Soit $M = x\mathbf{I} + yK$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que M est diagonalisable, préciser les valeurs propres de M, et donner une matrice diagonale semblable à M.

(iii) Démontrer que $F = \{x\mathbf{I} + yK/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension. Vérifier que F est stable pour $\times$: si $M, N \in F$, alors $M \times N \in F$.

(iv) Soit $M = x\mathbf{I} + yK$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer à quelle condition M est inversible, et exprimer alors M^{-1} (en fonction de $x, y, \mathbf{I}, K$).

$\boxed{\textbf{2)}}$ Soient $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et:

$$H = Vect(K, Z) = \{aK + bZ \quad / \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(i) Démontrer que les quatre matrices $K^2, Z \times K, K \times Z, Z^2$ sont dans H. En déduire que H est stable pour le produit matriciel $\times$.

(ii) Déterminer les sous-espaces propres pour K et Z.

(iii) En déduire une matrice $Q \in G$, vérifiant les trois conditions:

- • La valeur absolue de tous les coefficients de Q vaut $\frac{1}{2}$,
- •• ${}^tQ \times Q = \mathbf{I}$,
- ••• $K' = Q^{-1} \times K \times Q$ et $Z' = Q^{-1} \times Z \times Q$ sont toutes les deux diagonales.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que vaut alors: ${}^tQ \times \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} \times Q$?

$\boxed{\textbf{3)}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Calculer A^2 et A^3. La famille (A, A^2, A^3) est-elle libre ?

(ii) Quel est le rang de A ? A est-elle semblable à $J = diag(1, 1, 0, 0)$?

(iii) Déterminer un polynome réel R de degré 3, annulateur de A, tel que $R(A) = \mathbf{O}$. Préciser les valeurs propres de A.

(iv) Justifier que A est diagonalisable, et montrer l'existence de trois matrices U, V, W et de deux réels a et b tels que: $A = aU + bV$, avec:

$$U + V + W = I,\ U^2 = U, V^2 = V, W^2 = W,$$

$$\text{et} \qquad U \times V = V \times U = U \times W = W \times U = V \times W = W \times V = \mathbf{O}.$$

A est-elle semblable alors à $\Delta = diag(a, b, 0, 0)$?

(v) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de A et A^2.

(vi) Démontrer que $C = \{M \in E \quad / \quad A \times M = M \times A\}$ est un sous-espace vectoriel de E, et calculer sa dimension.

(vii) Étudier s'il peut exister M dans E, telle que $M^2 = A$.

EXERCICE 2

$\boxed{\mathbf{1)}}$ (i) Montrer l'existence de $a = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et de $b = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, et établir une relation entre a et b.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$.

Démontrer que F est ainsi définie sur $\mathbb{R}_+$, et continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $F(0)$.

(iii) Démontrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et vérifier que:

$$\forall x > 0, \qquad e^{-x}\left(F'(x) - F(x)\right) = -a\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

(iv) Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$; pour cela, on pourra d'abord établir une majoration de $F(x)$ pour $x > 0$ en fonction de x et a.

(v) En déduire, pour $x \geq 0$, une expression de $F(x)$ grâce à $J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, puis les valeurs de a et b.

$\boxed{\mathbf{2)}}$ (i) Soit $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Justifier que G est ainsi définie sur $\mathbb{R}$, est impaire, et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Déterminer le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de G'. En déduire que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, en précisant ce développement ainsi que le rayon de convergence.

(iii) Soit $H(x) = e^{x^2}G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que H est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et écrire ce développement sous la forme : $H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^{2k+1}$, en exprimant u_k sous forme d'une somme.

(iv) Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont H est solution sur $\mathbb{R}$. En déduire une relation de récurrence entre u_{k+1} et u_k, puis la valeur de u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{3)}}$ (i) Soit $\quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt, \qquad$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Démontrer que Φ est bien définie, et relier Φ avec G de la question **2)**. Démontrer que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; préciser la valeur de $\Phi'(x)$ pour tout réel x.

(ii) Préciser $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$, et grâce au calcul de a en **1)**, $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x)$.

(iii) Démontrer l'existence d'un polynôme réel P et d'une constante réelle C, que l'on explicitera, tels que:

$$\forall x > 0, \qquad \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = e^{-x^2}P\left(\frac{1}{x}\right) + C\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,du.$$

(iv) En déduire un équivalent simple de $\Phi(x)$ quand $x \to +\infty$, puis que Φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(v) Au moyen d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \Phi(x)\,dx$.

EXERCICE 3

$\boxed{\textbf{1)}}$ On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ étant orthonormale.

(i) Préciser la nature de la conique $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = 2y\}$, et préciser son ou ses foyers, sa ou ses directrices.

Rappeler alors comment on peut définir cette conique grâce à son ou ses foyers, et grâce à sa ou ses directrices.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $M_x = (x, \frac{x^2}{2})$. Déterminer une équation dans la base $\mathcal{B}$ de la tangente $\mathcal{T}_x$ à $\mathcal{P}$ en M_x ; préciser un vecteur dirigeant cette droite $\mathcal{T}_x$. Déterminer (par une équation) la droite $\mathcal{N}_x$ passant par M_x et perpendiculaire à $\mathcal{T}_x$.

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et la droite $D_x = \{(x, t), t \in \mathbb{R}\}$. Déterminer la droite Δ_x obtenue par symétrie orthogonale de D_x par rapport à $\mathcal{N}_x$, et déterminer le point d'intersection de Δ_x avec $\delta = \{(0, u), u \in \mathbb{R}\}$ (axe Oy). Comment interprétez-vous ce résultat ?

$\boxed{\textbf{2)}}$ On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{C} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ étant orthonormale.

(i) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta : (x, y, z) \mapsto (\cos(\theta)x + \sin(\theta)z, y, -\sin(\theta)x + \cos(\theta)z)$. Justifier que R_θ est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $M_x = (x, \frac{x^2}{2}, 0)$. Déterminer la nature de $\Gamma_x = \{R_\theta(M_x), \theta \in [0, 2\pi]\}$, ainsi que des équations dans la base $\mathcal{C}$ de Γ_x.

(iii) Déterminer une équation dans la base $\mathcal{C}$ de la surface $S = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \Gamma_x$. Que peut-on dire de cette surface ?

(iv) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, z) \mapsto (x, \frac{x^2 + z^2}{2}, z)$, et la surface: $\Sigma = F(\mathbb{R}^2)$.

Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta) \mapsto (r\sin(\theta), \frac{r^2}{2}, r\cos(\theta))$, et la surface: $\Phi = G(\mathbb{R}^2)$. Comparer (par des inclusions ou des égalités) les trois surfaces S, Σ, Φ.

(v) Soit $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, et $A_0 = F(x_0, z_0)$. Déterminer une équation dans la base $\mathcal{C}$ du plan tangent à Σ en A_0.

Déterminer A_0 tel que ce plan tangent soit de la forme: $P_c = \{(X, c, Z), (X, Z) \in \mathbb{R}^2\}$ (où c est une constante réelle).

$\boxed{\textbf{3)}}$ Toujours dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ on considère les deux courbes:

$$C_1 = \{(x, \frac{x^2}{2}, 0), \quad x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad C_2 = \{(0, y, \frac{y^2}{2}), \quad y \in \mathbb{R}\}.$$

et soit: $\Delta = \{(0, u, 0), u \in \mathbb{R}\}$ (axe Oy), et $O = (0, 0, 0)$.

(i) Soit $P = (x, \frac{x^2}{2}, 0)$ sur C_1, $x \neq 0$. Déterminer le point A_1 d'intersection entre Δ et la tangente à C_1 au point P.

(ii) Soit $Q = (0, y, \frac{y^2}{2})$ sur C_2, $y \neq 0$. Déterminer le point A_2 d'intersection entre Δ et la tangente à C_2 au point Q. A quelle condition a-t'on $A_1 = A_2$?

(iii) Soit σ la réunion des droites (dites "génératrices") (PQ) où $P \in C_1$ et $Q \in C_2$ avec $P \neq Q$, et tels que la tangente à C_1 au point P, et la tangente à C_2 au point Q, se coupent sur Δ. Déterminer une représentation paramétrique de σ grâce à une fonction H (définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$).

(iv) Démontrer que les plans tangents à σ en tous les points de σ qui appartiennent à une même droite génératrice (PQ) donnée, sont tous parallèles.

FIN DE L'EPREUVE