CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE n°1

On note A une matrice carrée d'ordre $n > 0$ à coefficients complexes, I_n est la matrice identité carrée d'ordre $n > 0$ ayant des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs.

Le noyau et l'image d'une matrice désignent respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associés à cette matrice.

On considère la matrice M_A carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs de la façon suivante :

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

1) Soit φ l'application qui à tout vecteur X de $\mathbb{C}^n$ associe le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^{2n}$.

   a) Montrer que φ est une application linéaire.
   b) Montrer que φ est bijective du noyau de la matrice A vers le noyau de la matrice M_A. Quelle relation en déduit-on entre les dimensions de $\ker(M_A)$ et de $\ker(A)$?
   c) En déduire le rang de la matrice M_A en fonction du rang de la matrice A. Citer le théorème utilisé.

2) On suppose, dans cette question, que la matrice A est diagonalisable et inversible.

   a) Exprimer la matrice M_A^2 en fonction de A.
   b) Démontrer que la matrice M_A^2 est diagonalisable.
   c) Montrer que la matrice M_A^2 est inversible.
   d) En déduire, en citant le théorème du cours utilisé, que la matrice M_A est diagonalisable.

3) On suppose, dans cette question, que la matrice M_A est diagonalisable.

   a) Démontrer que $\operatorname{Im}(M_A) = \operatorname{Im}(M_A^2)$.
   b) En déduire $\ker(M_A) = \ker(M_A^2)$.
   c) Montrer que la matrice A est inversible (indication : pour $X \in \ker A$, on pourra considérer le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$.)
   d) Démontrer que la matrice A est diagonalisable.

4) Que peut-on déduire des questions 2) et 3) ?

EXERCICE n°2

1) a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière réelle : $\sum \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$.

b) On note $S(x)$ sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$. Préciser son ensemble de définition I.

2) a) Démontrer que la fonction $x \mapsto xS(x)$ est dérivable sur I et donner une expression simple de sa dérivée.

b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$, en déduire que :

$$\forall x \in I,\ xS(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3) a) Montrer, en énonçant le théorème du cours utilisé, que l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ est intégrable sur $]0,1[$ et que :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx.$$

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1}{2x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) dx$ est convergente et que:

$$\int_0^1 \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \dfrac{\ln t}{1-t^2}\, dt$ existe.

5) Calculer $J = \iint_\Delta \dfrac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$ où $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

6) On admet la convergence de l'intégrale suivante :

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta.$$

Montrer que l'intégrale $K = \int_0^{\pi/4} \dfrac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta$ est convergente.

7) On admet que les intégrales J et K sont égales.

a) Exprimer $K + L$ en fonction de I.

b) Exprimer $K - L$ en fonction de I.

c) En déduire la valeur de l'intégrale I.

8) En déduire, à l'aide des questions précédentes, la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

EXERCICE n°3

1) On sait qu'une hyperbole $\mathcal{H}$ admet une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

   On rappelle qu'une hyperbole est dite équilatère lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires.

   Montrer que l'hyperbole $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère si et seulement si $a = b$. On considère que cette condition est maintenant réalisée.

2) Montrer qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}' = \left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$ dans lequel $\mathcal{H}$ admet une équation de la forme $XY = k$ avec $k \neq 0$.

3) On considère quatre points A, B, C, D, distincts deux à deux de l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ situés sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\,(\alpha, \beta)_{\mathcal{R}'}$ et de rayon $r > 0$.

   a) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

   b) Montrer que les abscisses X_A, X_B, X_C, X_D des points A, B, C, D dans le repère $\mathcal{R}'$ vérifient une équation polynomiale de degré quatre.

   c) Montrer que le produit de leurs abscisses dans le repère $\mathcal{R}'$ est constant.

4) La condition obtenue à la question 3)c) est-t-elle suffisante pour affirmer que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle?