CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

090

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice I

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (A_\theta)^k = A_{k\theta}$.
   Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
2. (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)$.
   (b) En déduire que le résultat de 1. est vérifié pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & -c \\ b & 3d \end{pmatrix}$.

On note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

4. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Donner la matrice C de φ dans la base $\mathcal{B}$.
6. La matrice C est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
7. Que vaut le déterminant de φ ? l'endomorphisme φ est-il inversible ?
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $f^p = \varphi$.

Exercice II

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note F_1 le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(-1, 0)$ et F_2 celui de coordonnées $(1, 0)$.

On considère dans $\mathcal{P}$ la conique $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M du plan vérifiant $d(M, F_1)d(M, F_2) = 1$ où $d(M, F_1)$ (respectivement $d(M, F_2)$) est la distance euclidienne entre les points M et F_1 (respectivement F_2).

1. (a) Donner la nature de la conique $\mathcal{C}$ puis, en déterminer l'axe focal, le ou les sommets, le centre éventuel et les asymptotes éventuelles.

   (b) Représenter $\mathcal{C}$.

2. Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$. Montrer que :

$$M \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$

3. Préciser les éventuelles symétries de l'ensemble $\mathcal{L}$.

4. (a) Montrer que, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\rho = \sqrt{2\cos(2\theta)}$ est une équation polaire de $\mathcal{L}$ dans le quart de plan $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

   (b) Etudier puis représenter $\mathcal{L}$.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

   En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan des complexes, on pourra identifier f à l'application qui à un complexe z associe le complexe z^2.

   (a) Montrer que l'image de $\mathcal{L}$ par f est un cercle de centre F_2 et de rayon à déterminer.

   (b) Montrer que l'image de $\mathcal{C}$ par f est une droite passant par F_2 dont on donnera une équation.

6. On note F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \qquad G(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$

   (a) Montrer que les ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ possèdent des points d'intersections dont on déterminera les coordonnées.

   (b) Calculer le gradient de F et de G.

   (c) En déduire qu'en un point d'intersection de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{C}$, les tangentes à $\mathcal{L}$ et à $\mathcal{C}$ sont orthogonales.

   (d) Représenter les ensembles $f(\mathcal{L})$ et $f(\mathcal{C})$. Que remarque-t-on ?

Exercice III

On s'intéresse dans cette exercice à la résolution du problème de Dirichlet suivant :

Etant donné une fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, on cherche une fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, & \Delta u(x,y) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, & u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

avec $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Une fonction u vérifiant ces conditions sera dite solution du problème de Dirichlet avec f pour condition au bord.

On notera i le complexe vérifiant $i^2 = -1$.

1. Soient g et h les fonctions définies par $g(x,y) = \arctan(\frac{x}{y+1})$ pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et $h(x) = \arctan(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer Δg et vérifier que g est solution du problème de Dirichlet avec h pour condition au bord.
2. Soit k la fonction définie par $k(x,y) = e^{x+iy}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
   (a) Vérifier que k est solution du problème de Dirichlet avec une condition au bord à préciser.
   (b) Montrer que, pour $r \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{re^{i\theta}} \, d\theta = 2\pi$ (on pourra utiliser le développement en série entière de l'exponentielle).
   (c) Soient $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $r > 0$ tel que le cercle de centre (x,y) et de rayon r soit inclus dans le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Déduire de la question précédente :

$$k(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta)) \, d\theta.$$

On se donne, pour toute la suite de l'exercice, une fonction f, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dx$ les coefficients de Fourier de f.

3. (a) Enoncer le résultat de cours donnant la convergence normale de la série de Fourier d'une fonction vérifiant certaines hypothèses à préciser.
   (b) Vérifier que la série de Fourier de f est normalement convergente.
   (c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n>0} (c_{-n}(f) e^{-inx} + c_n(f) e^{inx}) e^{-ny}$ est convergente.

On note alors, pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} e^{-|n|y}$.

4. (a) Soit $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $v_{y_0} : x \mapsto u(x, y_0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée seconde.
   (b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $w_{x_0} : y \mapsto u(x_0, y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée seconde.
5. Montrer que u est solution du problème de Dirichlet avec f pour condition au bord.
6. (a) Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} e^{inx}$ puis calculer sa somme.
   (b) On note h la fonction 2π-périodique et continue définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{2}{2 - e^{ix}}.$$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(h) = \dfrac{1}{2^n}$ si $n \geq 0$ et $c_n(h) = 0$ si $n < 0$.
   (c) Calculer la solution du problème de Dirichlet construite à la question 5, avec h pour condition au bord (on donnera une expression sans signe somme de cette solution).
7. On revient au cas général et l'on considère $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $r > 0$ tel que le cercle de centre (x,y) et de rayon r soit inclus dans le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Montrer que la solution u construite à la question 5. vérifie :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta))\, d\theta.$$