Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

Questions d'applications du cours

Parmi les affirmations suivantes indiquez sans justification (sauf à la question **2.d.**) celles que vous jugez vraies et celles que vous jugez fausses

Soient a et b deux réels. On note $\mathscr{E}_{a,b}$ l'espace vectoriel des suites **réelles** qui vérifient la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.

Question 1.

a. Pour tous réels a et b, $\mathscr{E}_{a,b}$ contient au moins une suite géométrique non nulle.

b. Pour que $\mathscr{E}_{a,b}$ contienne deux suites géométriques linéairement indépendantes, il suffit que $a = -3$ et $b = 4$.

c. Pour que $\mathscr{E}_{a,b}$ contienne deux suites géométriques linéairement indépendantes, il faut que $a = -3$ et $b = 4$.

d. $\mathscr{E}_{a,b}$ contient deux suites géométriques indépendantes lorsque $a = 2$ et $b = -1$.

e. La condition $a^2 + 4b \geqslant 0$ est une condition nécessaire pour qu'il existe dans $\mathscr{E}_{a,b}$ deux suites géométriques indépendantes.

Question 2.

a. L'application $f : u \in \mathscr{E}_{a,b} \longmapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ est une application linéaire toujours surjective mais injective seulement si $a^2 + 4b < 0$.

b. La condition $a \neq 0$ est une condition suffisante pour que $g : u \in \mathscr{E}_{a,b} \longmapsto (u_0, u_2) \in \mathbb{R}^2$ soit un isomorphisme.

c. La dimension de $\mathscr{E}_{a,b}$ est égale à deux seulement si $a^2 + 4b \geqslant 0$.

d. Donner en le justifiant soigneusement une base de l'espace vectoriel $\mathscr{E}_{a,b}$ dans le cas où $a = -1$ et $b = -1$.

Question 3.

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n\, x^n$ où $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ et on note R son rayon de convergence.

a. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et on en déduit que $R = 1$.

b. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ et on en déduit que la série entière diverge pour toute valeur du réel x.

c. On a $R < \dfrac{1}{2}$.

Question 4.

On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n\, x^n$ où $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ et on note r son rayon de convergence.

a. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc, $r \leqslant 1$.

b. On a : $r \geqslant 1$.

c. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin(n)\, x^{n-1}$ vaut 1 et donc, $r = 1$.

d. On a : $r \geqslant \dfrac{1}{2}$.

e. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} x^n = \arctan\left(\frac{x-\cos(1)}{\sin(1)}\right)$.

f. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} x^n = -\ln\left|1 - x\,e^i\right|$.

g. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} x^n = \frac{1}{2}\ln\left(1 - 2x\cos(1) + x^2\right)$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel des suites réelles.

On pourra noter une suite $u \in E$ sous la forme : $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ ou sous la forme $u = (u_n)$.

Une suite u de E est dite périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ lorsqu'elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.

PARTIE A

Soit l'ensemble $\mathscr{S}_0 = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0\}$.

1. Soient les deux suites λ et μ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\mu_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

1.1 Vérifier que λ et μ sont des éléments de $\mathscr{S}_0$.

1.2 Montrer que ces deux suites sont périodiques.

2. Montrer que $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Donner une base de $\mathscr{S}_0$ et préciser sa dimension.

4. Soit $u \in \mathscr{S}_0$ non nulle.

4.1 La suite u est-elle convergente ?

4.2 La série $\sum u_n$, de terme général u_n, est-elle convergente ?

4.3 Soit f la fonction de la variable réelle x donnée par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$

Donner l'ensemble de définition de f et une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles et des termes u_0 et u_1.

PARTIE B

Soit $\mathscr{S} = \{u \in E \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 2a\}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles u pour lesquelles

il existe une constante réelle a telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} + u_n = 2a$

1. **1.1** On prend : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. Vérifier que $u \notin \mathscr{S}$.

1.2 On prend : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{E(n/2)}$ où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t.

Vérifier que $u \in \mathscr{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.

1.3 On prend $u_n = 5$. Vérifier que $u \in \mathscr{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.

2. Vérifier que les suites constantes appartiennent à $\mathscr{S}$.

3. Déterminer les suites géométriques appartenant à $\mathscr{S}$.

4. Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.

5. A-t-on $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_0$? $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$?

6. Soit φ l'application définie par : $\varphi : u \in \mathscr{S} \longmapsto \varphi(u) = \dfrac{u_0 + u_2}{2}$.

   Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathscr{S}$.

   Quel est son noyau ?

7. Soit $v \in E$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1$;

   Montrer que $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 \oplus \mathrm{Vect}(v)$ où $\mathrm{Vect}(v)$ est la droite vectorielle engendrée par la suite v.

8. Soit $u \in \mathscr{S}$. Déterminer alors pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

9. Montrer que tout élément u de $\mathscr{S}$ est une suite périodique de période 4.

10. Prouver que l'application $\theta : u \in \mathscr{S} \longmapsto \theta(u) = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

    On note $\mathcal{C} = (I, J, K)$ la base de $\mathscr{S}$ obtenue comme image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par θ :

$$\theta(I) = (1,0,0),\ \theta(J) = (0,1,0) \text{ et } \theta(K) = (0,0,1)$$

11. Expliciter les cinq premiers termes de chacune des suites I, J et K.

12. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $T_k : u \in E \longmapsto T_k(u) = w$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{kn}$.

    12.1 Vérifier que T_k est un endomorphisme de E.

    12.2 Le sous-espace $\mathscr{S}$ est-il stable par T_2 ?

    12.3 Le sous-espace $\mathscr{S}$ est-il stable par T_3 ?

    12.4 Ecrire la matrice, dans la base $\mathcal{C}$ obtenue à la Question **10.**, de l'endomorphisme τ_3 induit par T_3 sur $\mathscr{S}$.

    12.5 L'endomorphisme τ_3 de $\mathscr{S}$ est-il diagonalisable ?

    12.6 Reconnaître alors la nature géométrique de τ_3.

13. Soient $u \in \mathscr{S}$ et h la fonction de la variable réelle x donnée par $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

    Exprimer $h(x)$ à l'aide des fonctions usuelles pour $x \in]-1, 1[$.

    Etudier les prolongements possibles en -1 et 1.

Partie C

Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ fixé et l'espace vectoriel $\mathscr{S}_p = \{u \in E \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + u_n = 2a\}$

1. Montrer que tout élément de $\mathscr{S}_p$ est périodique de période $2p$.

2. Soit $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$.

   2.1 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice F.

   2.2 Déterminer les valeurs propres de F.

   2.3 F est-elle inversible ?

   2.4 F est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$?

3. Prouver que l'application δ définie par : $\forall u \in \mathscr{S}_p$, $\delta(u) = (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}, a) \in \mathbb{R}^{p+1}$ où $a = \dfrac{u_0 + u_p}{2}$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_p$?

On note $\mathcal{C}_p$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ par δ.

4. Soit ψ l'application définie par :

$$\psi : u \in \mathscr{S}_p \longmapsto \psi(u) = t \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ t_n = u_{n+1}$$

4.1 Vérifier que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{S}_p$.

4.2 Sans nouveaux calculs, préciser $\psi^{2p} = \psi \, o \, \psi \, o \ldots o \, \psi$, composée $2p$ fois de l'application ψ.

4.3 Ecrire la matrice de ψ dans la base $\mathcal{C}_p$ de $\mathscr{S}_p$.

4.4 ψ est-elle diagonalisable ?

4.5 Prouver que ψ est bijective et déterminer son inverse ψ^{-1}.

Fin de l'épreuve

IN CHOISY – 12 1025 – D'après documents fournis