e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le sujet comporte des questions préliminaires et un problème de quatre parties numérotées **A**, **B**, **C** *et* **D**. *Les parties* **B** *et* **C** *du problème sont indépendantes de la partie* **A**.

L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$.

Soit n un entier strictement supérieur à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M. On note χ_M le polynôme caratéristique de la matrice M défini par $\chi_M(X) = \det(M - X\,I_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note ω le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Autant que possible, on préférera écrire ω plutôt que $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Questions préliminaires d'application directe du cours.

Les résultats de ces questions seront utilisés dans les parties **B** *et* **C** *du problème.*

1) **a)** Expliciter, sans justification, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité à l'aide de ω.

b) Factoriser, sans justification, le polynôme $X^n - 1$ comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

c) Soit $r \in \mathbb{Z}$. Montrer que, selon la valeur de r, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk}$ est égale, soit à 0, soit à n.

2) Soient M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes. Chaque valeur propre est écrite autant de fois que son ordre de multiplicité.

a) Démontrer que l'on a $\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k$.

b) Soient λ une valeur propre de M et V un vecteur propre associé. Montrer que pour tout entier naturel ℓ, le vecteur V est un vecteur propre de M^ℓ associé à la valeur propre λ^ℓ.

c) Montrer que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, la matrice $p(M)$ est diagonalisable.

d) Des questions précédentes, déduire que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\det(p(M)) = \prod_{k=0}^{n-1} p(\lambda_k).$$

Problème

A. 1) Soit λ un réel strictement positif. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) du$$

après en avoir justifié l'existence.

2) Pour tous réels x et t, calculer le module $|1 - xe^{\mathrm{i}t}|$ du nombre complexe $1 - xe^{\mathrm{i}t}$.

3) Montrer que, si $x \in]-1,1[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) dt$ existe.

On note h la fonction de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) dt\,.$$

4) A l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction h est paire.

5) Montrer que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

6) Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$ et $x \neq 0$, on a les deux égalités

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x - \cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}\, dt &= \frac{2}{x+1} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 - \lambda}{(u^2+\lambda^2)(u^2+1)}\, du \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) du\end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda = \dfrac{1-x}{1+x}$.

On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

7) Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et donner, pour tout $x \in]-1,1[$, une expression de $h'(x)$ et de $h(x)$.

B. 1) Soit a un nombre complexe. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $A = (\gamma_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ a^{j-i} & \text{si } i < j \\ a^{n-(i-j)} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'on a $\det(A) = (1 - a^n)^{n-1}$.

On pourra utiliser les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - a^{j-1} C_1$ sur les colonnes pour j variant de 2 à n.

2) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_s)_{1 \leqslant s \leqslant n}$ une base de E. On définit l'endomorphisme u de E par

$$u(e_1) = e_n \quad \text{et} \quad u(e_s) = e_{s-1} \quad \text{si } 2 \leqslant s \leqslant n.$$

a) Ecrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que le polynôme caractéristique χ_U de U est donné par

$$\chi_U(X) = (-1)^n (X^n - 1).$$

c) Préciser les valeurs propres de U. La matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

3) Soit le n-uplet $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On lui associe la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$C_\alpha = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & & \alpha_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Ses coefficients sont précisément définis par $c_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ \alpha_{n-(i-j)} & \text{si } i > j \end{cases}$.

On admettra que l'on a $C_\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k$.

Montrer que C_α est diagonalisable.

4) Montrer que les valeurs propres de C_α sont les nombres complexes $q(\omega^\ell)$ où $q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ et $\ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

C. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la matrice $\Gamma_\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Gamma_\varphi = C_\alpha$ où $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ avec

$$\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

1) a) Vérifier que les valeurs propres de Γ_φ sont les

$$\lambda_\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks}\right)\omega^{k\ell} \quad \text{où} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant n-1.$$

b) En déduire, en utilisant la question **1)c)** des questions préliminaires, que, pour tout entier $\ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on a $\lambda_\ell = \varphi\left(\dfrac{2\ell\pi}{n}\right)$.

c) Montrer que l'on a $\det(\Gamma_\varphi) = \displaystyle\prod_{\ell=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right)$.

2) Dans cette question, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1-a^n}{1-a\,\mathrm{e}^{it}}$ où $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$.

a) Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que l'on a $\varphi\left(\dfrac{2s\pi}{n}\right) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} a^\ell \omega^{s\ell}$.

c) Démontrer, qu'alors, Γ_φ est égale à la matrice A de la question **B.1)**.

D. 1) Soit F une fonction continue sur $[0, 2\pi]$. Justifier l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} F\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Dans cette question, on considère que a est réel tel que $|a| < 1$ et on pose

$$F(t) = \ln\left(\left|\frac{1}{1-a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right|\right).$$

a) Vérifier que la fonction F est définie et continue sur $[0, 2\pi]$.

b) A l'aide de la partie **C**, montrer que, pour tout $a \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(\left|\frac{1}{1-a\,\mathrm{e}^{it}}\right|\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{(\det(A))^{\frac{1}{n}}}{(1-a^n)}\right)$$

où A est la matrice de la question **B.1)**.

c) Retrouver alors l'expression de $h(x)$ obtenue à la question **A.7)**.