CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

095

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, E désigne l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

I_3 est la matrice unité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$.

1. Citer le Théorème de Cayley-Hamilton.

En déduire un polynôme non nul annulateur de la matrice A.

2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? Dans E ? Justifier vos réponses.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer A^k.

4. Démontrer que le sous-espace vectoriel F de E engendré par les puissances de la matrice A est de dimension finie.

Exhiber une base $\mathscr{B}$ de F constituée de puissances successives de la matrice A.

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\theta^k}{k\,!} A^k$$

Justifier que $S_n \in F$.

Donner les composantes de S_n dans la base $\mathscr{B}$ obtenue à la question précédente.

6. Démontrer que $M = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ existe.

7. Vérifier que $M \in F$ et donner ses composantes dans la base $\mathscr{B}$.

8. Soit $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté usuel.

Démontrer que M est la matrice dans $\mathscr{C}$ d'une rotation vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

9. Déterminer les valeurs du réel θ pour lesquels $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n^2$ est la matrice d'une symétrie vectorielle.

Exercice 2.

Préliminaires

1. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln(n)$.

On pourra admettre, dans tout le problème et sans le démontrer, le résultat suivant valable lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + o(\ln(n))$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = |\sin(x)|$$

1. **1.1** Donner une représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

1.2 Déterminer les coefficients réels de Fourier de f.

2. Prouver :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

4. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}$$

5. Pour tout entier naturel non nul m, on pose :

$$\rho_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(mx)|}{\sin(x)} \, \mathrm{d}x$$

5.1 Justifier l'existence de ρ_m.

5.2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Prouver : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x) \right) \times \sin(x) = \sin^2 \Big((n+1)x \Big)$.

5.3 Démontrer que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2nm - 1}}{4n^2 - 1}$ est convergente.

5.4 En déduire que :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad \rho_m = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2nm - 1}}{4n^2 - 1}$$

6. **6.1** Soit $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.

Montrer que g se prolonge en une application continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

6.2 On note alors pour tout m entier naturel non nul :

$$\alpha_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |\sin(mx)| \, g(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \beta_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(mx)|}{x} \, \mathrm{d}x$$

Exprimer ρ_m à l'aide de α_m et β_m.

7. Soient, pour $u > 0$, $G(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

7.1 Vérifier que la fonction G est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.2 Trouver une relation entre $G\left(\dfrac{m\pi}{2}\right)$ et β_m pour $m \in \mathbb{N}^*$.

7.3 Soit N la partie entière de $\dfrac{u}{\pi}$; vérifier que l'on a, pour u assez grand :

$$G(u) = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{N-1} v_n + \int_{N\pi}^u \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$$

7.4 En déduire la double inégalité :

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1} \leqslant G(u) \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

7.5 Déterminer alors un équivalent de $G(u)$ lorsque u tend vers $+\infty$.

8. En déduire un équivalent simple de ρ_m lorsque m tend vers l'infini.

Exercice 3.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Préliminaires

1. Soit f une application de classe C^n définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

(a) Justifier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\,x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) Prouver alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\,x^k + \frac{x^n}{(n-1)\,!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,f^{(n)}(xt)\,\mathrm{d}t$$

2. Soient u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \int_0^x u(x-t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x u(t)\,v(x-t)\,\mathrm{d}t$$

3. Soient :

- a, b, c et d des réels tels que : $a < b$ et $c < d$,
- f une application continue de $K = [a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 en la première variable.

3.1 Montrer que l'application H définie sur K par :

$$H(x,y) = \int_c^y f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

possède des dérivées partielles par rapport à x et à y que l'on déterminera.

3.2 Soit G une application de $[a,b]$ dans $[c,d]$ de classe C^1.
Montrer en utilisant la question précédente que l'application F définie sur $[a,b]$ par :

$$F(x) = \int_c^{G(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable et admet pour dérivée :

$$F'(x) = f(\,x, G(x)\,) \times G'(x) + \int_c^{G(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Partie 1

Soient φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ des réels fixés.
On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y^{(n)} = \varphi$$

1. Soit $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$X' = AX + B \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

2. Justifier que l'équation (E_1) admet une unique solution h vérifiant :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad h^{(k)}(0) = a_k$$

3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k\,!}\, x^k + \frac{x^n}{(n-1)\,!} \int_0^1 (1-t)^{n-1}\, \varphi(xt)\,\mathrm{d}t$$

Partie 2

Soit ψ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $c_1, ..., c_n$ des réels fixés.
On considère les équations différentielles :

$$(E_2) \quad y^{(n)} + c_1\, y^{(n-1)} + ... + c_n\, y = \psi \quad \text{i.e.} \quad y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} c_k\, y^{(n-k)} = \psi$$

et

$$(H_2) \quad y^{(n)} + c_1\, y^{(n-1)} + ... + c_n\, y = 0 \quad \text{i.e.} \quad y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} c_k\, y^{(n-k)} = 0$$

1. Soient s l'unique solution de (H_2) vérifiant les conditions initiales :

$$\forall\, k \in [\![0, n-2]\!], \quad y^{(k)}(0) = 0 \ \text{ et } \ y^{(n-1)}(0) = 1$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \int_0^x s(x-t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x s(t)\,\psi(x-t)\,\mathrm{d}t$$

2. Soit ψ_1 la primitive de ψ qui s'annule en 0.

Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x s'(x-t)\,\psi_1(t)\,\mathrm{d}t$$

3. En utilisant les préliminaires, démontrer que g est dérivable et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^x s''(x-t)\,\psi_1(t)\,\mathrm{d}t$$

4. En déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^x s'(x-t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

5. On admet alors que : $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^x s^{(k)}(x-t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t$.

Prouver que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = \psi(x) + \int_0^x s^{(n)}(x-t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t$$

6. En déduire que g est solution de (E_2).

7. Retrouver alors le résultat obtenu à la partie 1.

Application

Soit l'équation différentielle :

$$(E_3) \quad y'' + y = \alpha$$

où α est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\alpha(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } \ x \in [\,0, \pi\,] \\ \pi + x & \text{si } \ x \in [\,-\pi, 0\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Donner une représentation graphique de la fonction α sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant les résultats précédents, déterminer une solution particulière de (E_3).

On donnera les expressions de cette solution sur chacun des intervalles $]-\infty, -\pi[$, $]-\pi, 0\,[$, $]\,0, \pi\,[$ et $]\,\pi, +\infty[$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_3).

Fin de l'épreuve