ANNALES OFFICIELLES 2012

CONCOURS ECRICOME PREPA

ÉPREUVE ***ÉCRITE***

ÉPREUVE **SPÉCIFIQUE**

OPTION ÉCONOMIQUE

Mathématiques

ECRICOME

VISER PLUS HAUT

www.ecricome.org

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier ches les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

Evaluation

Exercices de valeur sensiblement égales.

Epreuve

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

EXERCICE 1.

$(\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}),+,.)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B.$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = L + A^n(U_0 - L).$$

Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note :
- Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ;
- b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B ;
- $\mathrm{Im}\,(b)$ l'image de l'endomorphisme b;
- $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-a)$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{Id}-a$.

2. Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si :

$$-x + y + z = 0$$

puis montrer que :

$$\mathrm{Im}\,(b) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-a).$$

3. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de a.

4. Ecrire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans cette base de vecteurs propres.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

6. En écrivant convenablement D comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n :

$$A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G.$$

Expliciter uniquement la matrice E sous la forme d'un tableau de nombres.

7. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$, telle que :

$$L' = DL' + B'.$$

8. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie :

$$L = AL + B.$$

9. Etablir que $EL = 0$.
10. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

EXERCICE 2.

Partie I. Etude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

1. Ecrire le développement limité de $f(x)$, à l'ordre 2, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0 \qquad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

4. Etudier les variations de φ. En déduire le tableau de variation de f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Etude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geqslant \frac{1}{e} \ln(n+1).$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Prouver l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

3. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leqslant \int_0^1 f(x)dx.$$

4. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3.

Soit n un entier naturel non nul. Une entreprise dispose d'un lot de n feuilles originales qu'elle a numérotées $1, 2, ..., n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant, suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est alors chargée du travail suivant : elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la boite et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boite lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).
On considère l'évènement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité c'est-à-dire que $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_n.
2. Etude de T_2. On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.
   (a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$: $P(T_2 = k) = (1 - a_2)(a_2)^{k-2}$.
   (b) Justifier que la variable $S_2 = T_2 - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   En déduire l'espérance et la variance de T_2 en fonction de a_2.
3. Etude de T_3. On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boite contient trois originaux et trois copies.
   (a) Calculer $P(T_3 = 2)$ puis $P(T_3 = 3)$ en fonction de a_2 et a_3.
   (b) A l'aide du système complet d'évènements $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$, démontrer pour tout $k \geqslant 2$ que :
   $$P(T_3 = k+1) = (1 - a_3) P(T_2 = k) + a_3 P(T_3 = k).$$
   (c) Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2, \quad P(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2} \left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].$$
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3 = k)$.
   (e) Prouver que la variable aléatoire $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E(T_3 - 1)$.
   Donner la valeur de $E(T_3)$ en fonction de a_2 et a_3.
   (f) Etablir que la variable aléatoire $T_3(T_3 - 1)$ admet une espérance et donner sa valeur en fonction de a_2 et a_3.
   En déduire que T_3 admet une variance.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n)$: «$U_n = L + A^n(U_0 - L)$».
Initialisation $n=0$. $L + A^0(U_0 - L) = L + I(U_0 - L) = L + U_0 - L = U_0$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un certain entier n alors
$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n + B \underset{(\mathcal{H}_n)}{=} A\left(L + A^n(U_0 - L)\right) + B \\ &= AL + A^{n+1}(U_0 - L) + B \underset{AL+B=L}{=} L + A^{n+1}(U_0 - L) \end{aligned}$$
ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. Un calcul direct montre que
$$\begin{aligned} u &\in \operatorname{Im}(b) \Leftrightarrow \exists v = (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad b(v) = u \Leftrightarrow B\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta - 2\gamma = x \\ \alpha - \gamma = y \\ 2\alpha - \beta - \gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) : 3\alpha - \beta - 2\gamma = x \\ (2) : \alpha - \gamma = y \\ 0 = -x + y + z \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 - L_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow u = (x,y,z) \in \operatorname{Im}(b) \Leftrightarrow -x + y + z = 0 \end{aligned}$$
Par le même raisonnement, on a
$$\begin{aligned} u &\in \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a) \Leftrightarrow \exists v = (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad (\operatorname{Id} - a)(v) = u \\ &\Leftrightarrow (I_3 - A)\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = x \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{3}\gamma = y \\ \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\gamma = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = x \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{3}\gamma = y \\ 0 = -x + y + z \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 - L_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow u = (x,y,z) \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a) \Leftrightarrow -x + y + z = 0 \end{aligned}$$
Par conséquent, on peut affirmer que $\operatorname{Im}(b) = \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a)$.

3. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc P peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de a. On note (e_1, e_2, e_3) cette base de vecteurs propres c'est-à-dire $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (0,-1,1)$.

4. D'après les formules de changement de base, on a

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Puisque A est la matrice de a dans la base canonique, D la matrice de a dans la base (e_1, e_2, e_3) et P la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3), on a : $A = PDP^{-1}$. On procède alors par récurrence en posant $(\mathcal{H}_n)$: «$A^n = PD^nP^{-1}$».
Initialisation $n = 0$. $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un entier n alors

$$A^{n+1} = A^nA \underset{(\mathcal{H}_n)}{=} \left(PD^nP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^nIDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

6. Il est immédiat que

$$\begin{aligned}
D^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = E' + \left(\frac{1}{2}\right)^n F' + \left(\frac{1}{3}\right)^n G' \\
\text{avec } E' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^n &= PD^nP^{-1} = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G \\
\text{avec } E &= PE'P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = PF'P^{-1}, \quad G = PG'P^{-1}.
\end{aligned}$$

7. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
L' &= DL' + B' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p + 1 & \frac{1}{2}q - 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}r + 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2}p + 1 \\ q = \frac{1}{2}q - 1 \\ r = \frac{1}{3}r + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = -2 \\ r = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

8. Un calcul direct de nouveau :

$$\begin{aligned}
L &= PL'P^{-1} = P\left(DL' + B'\right)P^{-1} = PDL'P^{-1} + PB'P^{-1} \\
&= \left(PDP^{-1}\right)\left(PL'P^{-1}\right) + B = AL + B
\end{aligned}$$

9. Par calcul, on a
$$EL = PE'P^{-1}PL'P^{-1} = PE'L'P^{-1} = P0_3P^{-1} = 0_3.$$
car $E'L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 0_3$.

10. En combinant les questions précédentes, on a
$$\begin{aligned} U_n &= L + A^n(U_0 - L) = L + \left(E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G\right)(U_0 - L) \\ &= L + EU_0 - \underbrace{EL}_{=0} + \left(\frac{1}{2}\right)^n F(U_0 - L) + \left(\frac{1}{3}\right)^n G(U_0 - L) \end{aligned}$$
Si on note
$$L + EU_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad F(U_0 - L) = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}, \quad G(U_0 - L) = \begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix}$$
alors $U_n = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{\alpha'}{2^n} + \frac{\alpha''}{3^n} \\ \beta + \frac{\beta'}{2^n} + \frac{\beta''}{3^n} \\ \gamma + \frac{\gamma'}{2^n} + \frac{\gamma''}{3^n} \end{pmatrix}$ et il est immédiat que $\begin{cases} \alpha + \frac{\alpha'}{2^n} + \frac{\alpha''}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \\ \beta + \frac{\beta'}{2^n} + \frac{\beta''}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta \\ \gamma + \frac{\gamma'}{2^n} + \frac{\gamma''}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma \end{cases}$.

EXERCICE 2.

Partie I. Etude d'une fonction f.

1. En utilisant le développement limité à l'ordre 3 de exp, on a :
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{6} + o(x^3)\right)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0. En outre, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. En utilisant la question 1, on a
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + (x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$
donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme quotient de deux telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas) et on a
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{e^{-x}x - (1 - e^{-x})}{x^2} = \frac{e^{-x}(x+1) - 1}{x^2}$$
donc $\varphi : x \mapsto e^{-x}(x+1) - 1$.

4. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (comme somme et produit de telles fonctions) et on a

$$\forall x \geqslant 0, \quad \varphi'(x) = -xe^{-x} \leqslant 0.$$

La fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0) = 0$ donc la fonction φ est négative sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent la fonction f' est aussi négative sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (numérateur tend vers 0 et dénominateur vers $+\infty$).

Partie II. Etude d'une suite.

1. Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned}
\forall u \quad &\in \quad [0,n], \quad \frac{u}{n} \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{u}{n} \geqslant -1 \underset{\exp\nearrow}{\Rightarrow} e^{-u/n} \geqslant e^{-1} \\
\underset{1+u>0}{\Rightarrow} \frac{e^{-u/n}}{1+u} \quad &\geqslant \quad e^{-1}.\frac{1}{1+u} \underset{0\leqslant n}{\Rightarrow} \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}du \geqslant \int_0^n e^{-1}.\frac{1}{1+u}du \\
&\Leftrightarrow \quad u_n \geqslant \left[e^{-1}\ln(1+u)\right]_0^n = \frac{\ln(n+1)}{e}.
\end{aligned}$$

(via la croissance de l'intégrale et le fait que l'intégration se fait selon les bornes croissantes). Etant donné que $\dfrac{\ln(n+1)}{e} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on peut affirmer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

2. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ (cf. **I.1**) donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ existe.

3. En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^n \frac{1}{1+u}du - u_n = \underbrace{\int_0^n \left(\frac{1-e^{-u/n}}{1+u}\right)du}_{=J_n}.$$

Etant donné que

$$\begin{aligned}
\forall u \quad &\in \quad [0,n], \quad \frac{u}{n} \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{u}{n} \leqslant 0 \underset{\exp\nearrow}{\Rightarrow} e^{-u/n} \leqslant e^0 = 1 \\
\underset{1+u>0}{\Rightarrow} \frac{e^{-u/n}}{1+u} \quad &\leqslant \quad \frac{1}{1+u} \underset{0\leqslant n}{\Rightarrow} \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}du \leqslant \int_0^n \frac{1}{1+u}du \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^n \frac{1}{1+u}du - u_n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, en posant le changement de variable $x = \dfrac{u}{n}$ dans l'intégrale J_n, on a $dx = \dfrac{du}{n} \Leftrightarrow du = ndx$, quand $u = 0$ alors $x = 0$ et quand $u = n$ alors $x = 1$ donc

$$\begin{aligned}
J_n - \int_0^1 f(x)dx \quad &= \quad \int_0^1 \left(\frac{1-e^{-x}}{1+nx} - \frac{1-e^{-x}}{x}\right)dx \\
&= \quad \int_0^1 \underbrace{\frac{(1-e^{-x})}{x(1+nx)}}_{\geqslant 0} \underbrace{(\overbrace{x-1}^{\leqslant 0}\overbrace{-nx}^{\leqslant 0})}_{\leqslant 0} dx \leqslant 0
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

4. Puisque $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+u}du = [\ln(1+u)]_0^n = \ln(n+1)$ et si on note $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ qui est un réel, l'inégalité précédente nous permet d'écrire :

$$0 \leqslant \ln(n+1) - u_n \leqslant I \Leftrightarrow 0 \leqslant 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leqslant \underbrace{\frac{I}{\ln(n+1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$$

EXERCICE 3.

1. L'évènement $\overline{A_n}$ est réalisé si et seulement si les deux premières feuilles piochées soient agrafées. Pour cela, on sélectionne un original parmi les n possibles ($\binom{n}{1}$ choix possibles) et sa copie (aucun choix). Etant donné que l'on pouvait piocher 2 feuilles parmi $2n$ possibles ($\binom{2n}{2}$ choix possibles), on obtient :

$$1 - a_n = P\left(\overline{A_n}\right) = \frac{\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{1}{2n-1} \Rightarrow a_n = \frac{2n-2}{2n-1}.$$

2. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on désigne par B_k l'événement «tirer un original et sa copie à la k-ième pioche».

   (a) Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= P\left(\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{k-2}} \cap B_{k-1} \cap B_k\right) \\ &= \overbrace{P\left(\overline{B_1}\right) \times P_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right) \times \cdots \times P_{\overline{B_2}\cdots\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-3}}}\left(\overline{B_{k-2}}\right)}^{k-2 \text{ facteurs}} \\ &\quad \times P_{\overline{B_2}\cdots\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-2}}}(B_{k-1}) \times P_{\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-2}}\cap B_{k-1}}(B_k) \\ &= \overbrace{a_2 \times a_2 \times \cdots \times a_2}^{k-2 \text{ facteurs}} \times (1-a_2) \times 1 = (a_2)^{k-2}(1-a_2) \end{aligned}$$

   (b) Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$P(S_2 = k) = P(T_2 = k+1) = (a_2)^{k-1}(1-a_2)$$

   donc S_2 suit la loi $\mathcal{G}(1-a_2)$ donc S_2 admet une espérance et une variance donnée par :

$$\begin{aligned} E(S_2) &= \frac{1}{1-a_2} \Leftrightarrow E(T_2 - 1) = \frac{1}{1-a_2} \\ &\Leftrightarrow E(T_2) - 1 = \frac{1}{1-a_2} \Leftrightarrow E(T_2) = 1 + \frac{1}{1-a_2} \\ V(S_2) &= \frac{a_2}{(1-a_2)^2} \Leftrightarrow V(T_2 - 1) = \frac{a_2}{(1-a_2)^2} \Leftrightarrow V(T_2) = \frac{a_2}{(1-a_2)^2}. \end{aligned}$$

   Etant donné que $a_2 = \frac{2}{3}$, on en déduit que $E(T_2) = 4, \quad V(T_2) = 6.$

3. On conserve les notations de la question 2.

   (a) $P(T_3 = 2) = P(\emptyset) = 0$,
   $P(T_3 = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1)\, p_{B_1}(B_2)\, p_{B_1 \cap B_2}(B_3) = (1-a_3)(1-a_2)\,1 = (1-a_3)(1-a_2)$

   (b) En suivant l'indication de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}
P(T_3 = k+1) &= P(T_3 = k+1 \cap A_3) + P\left(T_3 = k+1 \cap \overline{A_3}\right) \\
&= P(A_3)\, P_{A_3}(T_3 = k+1) + P\left(\overline{A_3}\right) P_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1) \\
&= a_3 P(T_3 = k) + (1-a_3)\, P(T_2 = k).
\end{aligned}$$

   En effet, $P_{A_3}(T_3 = k+1)$ est la probabilité de vider la boite à la $k+1$-ième pioche sachant que la première pioche n'a pas permis d'agrafer deux feuilles. Autrement dit, à l'issue de la première pioche, il faut vider la boite (qui contient toujours 3 originaux et 3 copies) en k pioches donc cette probabilité vaut $P(T_3 = k)$.
   D'autre part, $P_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)$ est la probabilité de vider la boite à la $k+1$-ième pioche sachant que la première pioche a permis d'agrafer deux feuilles. Autrement dit, à l'issue de la première pioche, il faut vider la boite (qui contient alors 2 originaux et 2 copies) en k pioches donc cette probabilité vaut $P(T_2 = k)$.

   (c) On procède par récurrence sur k.
   Initialisation $k = 2$ alors $P(T_3 = k) = 0$ et

$$\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{2-2} - (a_2)^{2-2}\right] = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}[1-1] = 0$$

   donc l'initialisation est justifiée.
   Hérédité. Supposons la propriété vérifiée au rang k alors

$$\begin{aligned}
P(T_3 = k+1) &= a_3 P(T_3 = k) + (1-a_3)\, P(T_2 = k) \\
&= a_3 \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] + (1-a_3)(a_2)^{k-2}(1-a_2) \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3 - a_2}\left\{a_3\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] + (a_3 - a_2)(a_2)^{k-2}\right\} \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3 - a_2}\left\{(a_3)^{k-1} - (a_2)^{k-1}\right\}
\end{aligned}$$

   ce qui démontre la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

   (d) En utilisant la convergence de la série $\sum\limits_n q^n$ quand $|q| < 1$ et en tenant compte que sa somme vaut $\dfrac{1}{1-q}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3 = k) &= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3 - a_2} \sum_{k=0}^{+\infty}\left[(a_3)^k - (a_2)^k\right] \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3 - a_2}\left(\frac{1}{1-a_3} - \frac{1}{1-a_2}\right) \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3 - a_2}\left(\frac{a_2 - a_3}{(1-a_3)(1-a_2)}\right) = 1
\end{aligned}$$

(e) Etant donné que la série $\sum_n nq^{n-1}$ converge quand $|q| < 1$ et en tenant compte que sa somme vaut $\frac{1}{(1-q)^2}$, on peut affirmer que les séries

$$\sum_{k\geqslant 2}(k-1)(a_3)^{k-2} \underset{n=k-1}{=} \sum_{n\geqslant 1} n(a_3)^{n-1}$$
$$\sum_{k\geqslant 2}(k-1)(a_2)^{k-2} \underset{n=k-1}{=} \sum_{n\geqslant 1} n(a_2)^{n-1}$$

sont convergentes donc la série

$$\frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}\sum_{k\geqslant 2}(k-1)\left((a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right) = \sum_{k\geqslant 2}(k-1)P(T_3=k)$$

est aussi convergente. Par conséquent, d'après le théorème de transfert, la variable $T_3 - 1$ admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(T_3-1) &= \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)P(T_3=k) = \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\left((a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right)\\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}\sum_{j=1}^{+\infty} j\left((a_3)^{j-1}-(a_2)^{j-1}\right) \qquad (j=k-1)\\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right)\\
E(T_3) &= 1+\frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right)
\end{aligned}$$

(f) Avec le même argumentaire que précédente, en utilisant également la convergence de la série $\sum_n n(n-1)q^{n-2}$ quand $|q| < 1$ et en tenant compte que sa somme vaut $\frac{2}{(1-q)^3}$ ainsi qu'en utilisant le théorème du transfert, la variable $T_3(T_3-1)$ admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(T_3(T_3-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(T_3=k)\\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left((a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right)\\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}\left(\frac{2}{(1-a_3)^3}-\frac{2}{(1-a_2)^3}\right).
\end{aligned}$$

En particulier, on est assuré de l'existence de l'espérance pour la variable $T_3(T_3-1) = T_3^2 - T_3$. En outre, la variable T_3 admet une espérance donc la variable $(T_3^2 - T_3) + T_3 = T_3^2$ admet une espérance ce qui prouve que T_3 admet une variance.

RAPPORT

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Avec une moyenne de 10 et un écart-type de 5,6, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Bien traitée par l'immense majorité des candidats.
2. La définition de l'image d'un endomorphisme est mal comprise par une large part des candidats. Beaucoup de candidat se ramènent à l'équation $b(x) = x$ (valable si b est un projecteur ce qui n'est pas le cas ici) ou $b(x) = 0$ (confusion avec la recherche du noyau). Lorsque la question est correctement abordée, il y a généralement l'oubli récurrent de l'inclusion réciproque (ou de l'égalité des dimensions) pour prouver l'égalité de deux ensembles.
3. Un certain nombre de candidats vérifient seulement que les vecteurs colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres : il fallait encore justifier correctement que ces vecteurs forment une famille libre maximale et donc une base. Peu d'étudiants notent au passage que A est diagonalisable.

4. Généralement, le calcul de D et B' est fait via les images par a et b des vecteurs propres de la base.

5. Attention à bien justifier dans la phase d'hérédité que $A = PDP^{-1}$, si on ne l'a pas fait auparavant.

EXERCICE 2

Partie I. Beaucoup de candidats partent d'un DL d'ordre 2 sur l'exponentielle ce qui est insuffisant compte tenu du quotient par x. Ils ne pensent pas ensuite à effectuer les modifications nécessaires pour donner le DL à l'ordre 2 de f.
Le reste de la partie est souvent bien traité.

Partie II.

1. Elle est souvent abordée par une récurrence ou une intégration par parties. Cette dernière méthode qui ramène à un problème de positivité d'une nouvelle intégrale qui n'est pas bien traitée en général.

2. L'existence de l'intégrale est souvent correctement traitée, il suffisait d'invoquer la continuité de la fonction considérée sur le segment $[0, 1]$.

3. Question correctement traitée lorsqu'elle est abordée.

4. Lorsque l'équivalent est deviné, peu de copies fournissent une justification correcte.

EXERCICE 3

1. Il y a très peu de réponses correctes en raison de fréquentes difficultés à dénombrer.

2. (a) Les candidats se contentent souvent d'une réponse en « français ». L'utilisation d'événements élémentaires et le théorème des probabilités composées sont rarement mentionnés.
   (b) Elle est correctement réussie par les candidats.

3. (a) Le résultat correct est trop peu souvent obtenu.
   (b) Question rarement traitée.
   (c) Un nombre insuffisant de candidats utilise le principe de récurrence.
   d,e,f Lorsque les calculs sur les séries sont abordés, ils le sont généralement correctement.