ANNALES
OFFICIELLES
2013
CONCOURS
ECRICOME
PREPA

ÉPREUVE ***ÉCRITE***
ÉPREUVE **SPÉCIFIQUE**
OPTION SCIENTIFIQUE

Mathématiques

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

www.ecricome.org

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier ches les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

Deux exercices d'application des connaissances de base ;
un problème faisant largement appel aux possiblités.

Évaluation

Deux exercices de valeurs sensiblement égale ;
12 à 14 points pour le problème.

Épreuve

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

EXERCICE 1

On note :

- $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes (à n lignes) à coefficients réels ;
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- ${}^tU$ la transposée d'une matrice U ;
- $\ker(M) = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } MX = 0\}$ et $\mathrm{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ où M est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\|$ sa norme associée.
On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel k non nul tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$.
2. Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles et positives.
3. Prouver que : $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que : $B^2 = B$.
5. Montrer que : $\ker(B) = \ker(A)$ puis que : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A)$.
6. Etablir que : $\forall X \in \mathrm{Im}(A), \quad \|AX\| = \|X\|$.

EXERCICE 2

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{5}\left[x^2\left(1-x^2\right) + y^2\left(1-y^2\right) + 2xy\right] \;;$$

- la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \quad \text{avec} \quad (u_0, u_1) \in [0,1]^2.$$

1. <u>Etude de f.</u>

(a) Si (a,b) un point critique de f, justifier que $a=b$ puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.

On admettra dans toute la suite que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \leqslant \frac{2}{5}\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2.$$

(b) Préciser le ou les extrémums de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.

(c) Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.

2. Programmation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Ecrire un programme en PASCAL demandant à l'utilisateur un entier N ainsi que les valeurs initiales u_0, u_1 et calculant la valeur de u_N correspondante.

3. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{5}\left(a_n + a_{n+1}\right) \quad \text{avec} \quad a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1.$$

(a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \leqslant \dfrac{2}{5}\left(u_n + u_{n+1}\right)$.

(b) Justifier que : $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant a_n$.

(c) Etablir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

PROBLEME

Soit x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie réelle de x c'est-à-dire l'unique entier N tel que : $N \leqslant x < N+1$.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor.$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on l'appelle « la discrétisée de X »
Le problème consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant quelques lois usuelles (**PARTIE I)**
- puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme (**PARTIE II)**
- et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité (**PARTIE III).**

Les parties **I, II** et **III** sont largement indépendantes.

PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. En PASCAL,

   - la commande **floor(x)** calcule la partie entière du réel x ;
   - la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0,1]$) ;

   On rappelle que si Z suit la loi uniforme sur $[0,1]$ alors, pour $a \in \mathbb{R}_+$, aZ suit la loi uniforme sur $[0,a]$.

   Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,a]$ ($a \in \mathbb{R}_+$) et X_d sa discrétisée.

   Ecrire une fonction PASCAL qui à un réel a (positif) fournit par l'utilisateur renvoie une réalisation de X_d.

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{P}\left(X_d = k\right) = \int_k^{k+1} f\left(x\right) dx.$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,N]$.
   Déterminer la loi de X_d (on précisera les valeurs prises par X_d).

4. Etablir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} Y\left(\Omega\right) = \{1,2,..,9\} \text{ et } \forall k \in Y\left(\Omega\right), \\ \mathrm{P}\left(Y = k\right) = \dfrac{1}{\ln\left(10\right)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \end{array}\right.$$

   Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X posséde f pour densité alors sa discrétisée X_d suit la loi de Y.

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.

   (a) Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.

   (b) Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi connue dont on donnera le nom et le paramètre.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, prouver que :

$$\mathrm{P}\left(Y_n \leqslant x\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda\left(\lfloor nx \rfloor + 1\right)}{n}\right).$$

   (d) Donner un encadrement simple de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ puis montrer que la suite $\left(Y_n\right)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus n et on pose :

$$\forall k \in \{0, .., n\}, \quad e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k.$$

Si Q appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t)\,dt.$$

1. Pour tout entier $k \in \{0, .., n\}$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de $e_0, .., e_n$.

2. Etablir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

3. Etablir que la famille $\left(u(e_k)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\,dt.$$

5. En considérant $n = 1$, expliciter Q_R lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \dfrac{x}{6}$.

6. Soient N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.

   (a) On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = Q(x) \text{ si } x \in [0, N+1[\ ; \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Etablir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\begin{cases} X_d(\Omega) = \{0, .., N\}, \\ \forall k \in X_d(\Omega), \quad \mathrm{P}(X_d = k) = R(k) \end{cases}.$$

   (b) On considère la variable aléatoire discrète Y définie par :

   $$\begin{cases} Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}, \\ \forall k \in Y(\Omega), \quad \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{k}{6} \end{cases}.$$

   Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = Q(x)$$

   et tel que Y soit la discrétisée de X. **Indication** : *procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.*

PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et telles que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(Y = k) = g(k).$$

En particulier, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} g(k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1.$$

On suppose en outre que g est <u>décroissante</u> et qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |g'(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } |g''(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{cases} f(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \text{ si } x \geqslant 0 \ ; \\ f(x) = 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} g'(x+k)$. Quel est le signe de f ?

2. (a) Etablir que : $\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$
$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$
   (b) Prouver l'existence d'un réel $D \geqslant 0$ tel que :
$$\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant D|x-a|.$$
   Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit t un réel positif, pour tout entier N, on pose :
$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \quad \text{et} \quad R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$
   (a) Démontrer que : $\forall k \geqslant 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$
$$\frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.$$
   puis que :
$$\forall N \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}.$$
   (b) Prouver que :
$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)\,dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\,dt.$$
   (c) Justifier que : $\lim\limits_{k\to+\infty} g(k) = 0$ et que :
$$\int_0^1 f(t)\,dt = g(0).$$

4. (a) Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t+1) - f(t) = g'(t)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dt.$$

(b) Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $S_N = \int_0^N f(t)\, dt$. Etablir que :

$$\forall N \geqslant 1, \quad S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)\, dt \leqslant S_{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ et préciser sa valeur.

(c) Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. ${}^tB = {}^tA^t\left({}^tA\right) = {}^tAA = B, \quad \langle BX, X\rangle = {}^t(BX)\,X = {}^tX^tBX = {}^tX^tAAX = {}^t(AX)\,AX = \|AX\|^2.$

2. Puisque B est symétrique à coefficients réels, elle est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ donc toutes ses valeurs propres sont réelles. En outre, si λ est une valeur propre de B et X_0 un vecteur propre associé (donc non nul) alors $BX_0 = \lambda X_0 \Rightarrow \langle BX_0, X_0\rangle = \langle \lambda X_0, X_0\rangle \Leftrightarrow \|AX_0\|^2 = \lambda\|X_0\|^2 \underset{\|X_0\|\neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda = \dfrac{\|AX_0\|^2}{\|X_0\|^2} \geqslant 0$

3. ${}^tAA = A^kA = AA^k = A^tA \Rightarrow B^k = \left({}^tAA\right)^k = \left({}^tA\right)^k A^k = {}^t\left(A^k\right)A^k = {}^t\left({}^tA\right)^tA = A^tA = {}^tAA = B.$
Le polynôme $X^k - X$ annule B donc les valeurs propres de B sont parmi les racines de celui-ci. Or on a $x^k - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^{k-1}-1\right) = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$ (selon la parité de $k-1$) donc $-1, 0$ et 1 sont les seules valeurs propres possibles de B.

4. Puisque B est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $B = PDP^{-1} \Rightarrow B^2 = PD^2P^{-1}$. Etant donné que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de B c'est-dire des réels valant 1, 0 ou -1. Or les valeurs propres de B sont positives donc les coefficients de D sont des réels valant 1 ou 0 donc $D^2 = D$ ($x^2 = x$ pour $x \in \{0,1\}$) d'où $B^2 = PDP^{-1} = B$.

5. $X \in \ker(B) \Leftrightarrow BX = 0 \Rightarrow \langle BX, X\rangle = 0 \Leftrightarrow \|AX\|^2 = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X \in \ker(A) \Rightarrow \ker(B) \subset \ker(A)$.
$X \in \ker(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Rightarrow BX = {}^tA(AX) = 0 \Leftrightarrow X \in \ker(B) \Rightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$ d'où l'égalité.
D'autre part, soit $X \in \operatorname{Im}(B)$, il existe Y tel que $X = BY = {}^tAAY \underset{{}^tAA = A^tA}{=} A^tAY = A\left({}^tAY\right) \in \operatorname{Im}(A)$ donc $\operatorname{Im}(B) \subset \operatorname{Im}(A)$ et le théorème du rang montre que $\dim(\operatorname{Im}(B)) = n - \dim(\ker(B)) = n - \dim(\ker(A)) = \dim(\operatorname{Im}(A))$ ce qui justifie l'égalité $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Im}(A)$.

6. Soit $X \in \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(B)$, puisque B est un projecteur, on a $BX = X \Rightarrow \langle BX, X\rangle = \langle X, X\rangle$
$\Leftrightarrow \|AX\|^2 = \|X\|^2 \Leftrightarrow \|AX\| = \|X\|$.

EXERCICE 2

1. (a) La fonction f est clairement C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert alors (a,b) est un point critique de f ssi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2a^3 + b = 0 \\ b - 2b^3 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3 = a + b \\ 2b^3 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = b^3 \\ 2a^3 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a^3 = 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a^2-1\right) = 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}, \quad f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = f(-1,-1) = \frac{2}{5}$$

(b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée vaut $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \dfrac{2}{10}(2-t)$ donc son tableau de variations est

t	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(t)$		$+$		$-$	
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2/5$	$\searrow$	$-\infty$

. Ainsi g admet $\dfrac{2}{5}$ pour valeur maximale et elle n'est pas minorée (donc elle n'a ni minimum, ni borne inférieure)

(c) D'après les deux questions précédentes, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \leqslant g\left(x^2+y^2\right) \leqslant \dfrac{2}{5}$. En remarquant que $f(1,1) = \dfrac{2}{5}$, on peut affirmer que $\dfrac{2}{5}$ est la valeur maximale de f. En outre, on a $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t,0) = g\left(t^2\right) \underset{t\to+\infty}{\to} -\infty$ donc f n'est pas minorée.

2. A écrire.

3. (a) On procède par récurrence double en posant $(\mathcal{H}_n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ».
Initialisation $n = 0$ et $n = 1$. $u_0 \in [0,1]$ et $u_1 \in [0,1]$ donc $(\mathcal{H}_0)$ et $(\mathcal{H}_1)$ sont vraies.
Hérédité. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ et $(\mathcal{H}_{n+1})$ vraies pour un entier n alors

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_nu_{n+1} \leqslant 1 \\ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant 1 - u_n^2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 1 - u_{n+1}^2 \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{5}(1+1+2) = \frac{4}{5} \leqslant 1$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+2})$ et achève la récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \Rightarrow 1 - u_n^2 \leqslant 1$, $u_n^2 \leqslant 1$ et $u_n u_{n+1} \leqslant u_{n+1}$ donc $u_{n+2} \leqslant \frac{1}{5}\left(u_n^2 + u_{n+1}^2 + 2u_n u_{n+1}\right) \leqslant \frac{(u_n + u_{n+1})^2}{5}$. Or on a $\frac{(u_n + u_{n+1})^2}{5} - \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}) = \frac{(u_n + u_{n+1})}{5}(\underbrace{u_n + u_{n+1}}_{\leqslant 1+1=2} - 2) \leqslant 0 \Rightarrow u_{n+2} \leqslant \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.

(b) On procède par récurrence double en posant $(\mathcal{H}_n)$: « $u_n \leqslant a_n$ ». **Initialisation** $n = 0$ et $n = 1$. $a_0 = u_0 \Rightarrow a_0 \geqslant u_0$ et $a_1 = u_1 \Rightarrow a_1 \geqslant u_1$ donc $(\mathcal{H}_0)$ et $(\mathcal{H}_1)$ sont vraies. **Hérédité**. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ et $(\mathcal{H}_{n+1})$ vraies pour un entier n alors $u_{n+2} \leqslant \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}) \leqslant \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) = a_{n+2}$ ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+2})$ et achève la récurrence.

(c) La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{2}{5}(x+1) \Leftrightarrow 5x^2 - 2x - 2 = 0, \quad \Delta = (-2)^2 - 4(-2)5 = 44 = 2^2 * 11 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 + 2\sqrt{11}}{10} = \frac{1+\sqrt{11}}{5} = r \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{11}}{5} = s \end{aligned}$$

Les deux solutions r et s étant distinctes, il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda r^n + \mu s^n$. Puisque $9 < 11 < 4 \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4 \Rightarrow \begin{cases} 0 < r < \frac{1+4}{5} = 1 \\ -\frac{3}{5} = \frac{1-4}{5} < s < 0 \end{cases}$, les suites $(r^n)_{n\geqslant 0}$ et $(s^n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers 0 donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. D'autre part, on dispose de l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant a_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

PROBLEME

PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. A ecrire.

2. $(X_d = k) \Leftrightarrow (k \leqslant X < k+1) \Rightarrow P(X_d = k) = P(k \leqslant X < k+1) \underset{(*)}{=} P(X \leqslant k+1) - P(X \leqslant k)$
$= \int_{-\infty}^{k+1} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx = \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \quad (*)$: puisque X admet une densité continue.

3. Sa densité est $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{ si } x \in [0, N[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx$. Si $k < 0$ alors $k+1 \leqslant 0$ donc $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} 0dx = 0$. Si $k \geqslant N$ alors $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} 0dx = 0$. Si $0 \leqslant k < N$ alors $0 \leqslant k+1 \leqslant N$ donc $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{N}dx = \frac{1}{N}$. Par conséquent, X_d suit la loi uniforme sur $\{0, .., N-1\}$.

4. $\sum_{k=1}^{9} P(Y = k) = \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \frac{1}{\ln(10)}(\ln(10) - \ln(1)) = 1$ donc Y est une variable aléatoire discrète. En outre, on a $\forall k \in Y(\Omega), \quad P(Y = k) = \frac{1}{\ln(10)}(\ln(k+1) - \ln(k))$ $= \frac{1}{\ln(10)} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx$. On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(10)} * \frac{1}{x} \text{ si } x \in [1, 10[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, positive et $\int_1^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{\ln(10)}[\ln(x)]_1^{10} = 1$. Ainsi f peut être con-

sidérée comme la densité d'une variable aléatoire X et $\forall k \in \{1,..,9\}$, $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx$. On vérifie comme à la question précédente que cette dernière formule reste vraie si $k \in \mathbb{Z}\backslash\{1,..,9\}$.

5. (a) Pour tout réel t, on a $P(nX \leqslant t) = P\left(X \leqslant \frac{t}{n}\right) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{\lambda t}{n}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. La fonction $t \mapsto P\left(X \leqslant \frac{t}{n}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc la variable nX possède une densité donnée par :
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \left(P\left(X \leqslant \frac{t}{n}\right)\right)' = \begin{cases} \frac{\lambda}{n}\exp\left(-\frac{\lambda t}{n}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

(b) Puisque nX admet une densité f_n, on a pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $P(\lfloor nX \rfloor \leqslant k) = \int_k^{k+1} f_n(t)\,dt$. Si $k < 0$ alors $k + 1 \leqslant 0$ donc $f_n = 0$ sur $[k, k+1]$ et $P(\lfloor nX \rfloor \leqslant k) = 0$. Si $k \geqslant 0$ alors

$$\begin{aligned} P(\lfloor nX \rfloor = k) &= \int_k^{k+1} \frac{\lambda}{n}\exp\left(-\frac{\lambda t}{n}\right) dt = \left[-\exp\left(-\frac{\lambda t}{n}\right)\right]_{t=k}^{t=k+1} = \exp\left(-\frac{\lambda k}{n}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda(k+1)}{n}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda k}{n}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right) = \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^k \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

En particulier, si on pose $p = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)$, on en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(\lfloor nX \rfloor + 1 \leqslant k) = P(\lfloor nX \rfloor \leqslant k - 1) = (1-p)^{k-1} p$ donc $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)$.

(c) On remarque que si q est un entier et t un réel alors $q \leqslant t \Leftrightarrow q \leqslant \lfloor t \rfloor$ donc $(Y_n \leqslant x) = (\lfloor nX \rfloor \leqslant nx) = (\lfloor nX \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor)$. En posant $p = \exp\left(-\frac{\lambda}{n}\right)$, on a $P(Y_n \leqslant x) = P(\lfloor nX \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor) = 1 - P(\lfloor nX \rfloor + 1 > \lfloor nx \rfloor + 1)$
$= 1 - \sum_{k=\lfloor nx \rfloor + 2}^{+\infty} p^{k-1}(1-p) = 1 - p^{\lfloor nx \rfloor + 1}(1-p)\frac{1}{1-p} = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right)$

(d) $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \Rightarrow \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 \leqslant x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty}\left(x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x \Rightarrow \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right) = x$. En utilisant la continuité de la fonction exp, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leqslant x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $P(Y_n \leqslant x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leqslant x) = 0$, on peut affirmer que la suite $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(e_k)(x) = \int_x^{x+1} t^k dt = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1} \underset{\text{de Newton}}{\overset{\text{Binôme}}{=}} \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}x^k \Rightarrow u(e_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}e_j$.

2. Pour tous $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q)(x) &= \int_x^{x+1} (\lambda P + \mu Q)(t)\,dt = \int_x^{x+1} (\lambda P(t) + \mu Q(t))\,dt \\ &= \lambda \int_x^{x+1} P(t)\,dt + \mu \int_x^{x+1} Q(t)\,dt = \lambda u(P)(x) + \mu u(Q)(x) \end{aligned}$$

ce qui justifie la linéarité de u. D'autre part, pour tout $k \in \{0,..,n\}$, $u(e_k) \in \text{Vect}(e_0,..,e_k) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $Q = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k \Rightarrow u(Q) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u(e_k) \in \mathbb{R}_n[X]$.

3. Il s'agit d'une famille échelonnée en degré (car $\deg(u(e_k)) = k$) donc libre et elle est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ ce qui prouve que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $R \in \mathbb{R}_n[X]$, l'égalité proposée est équivalente à l'égalité $R = u(Q_R)$. La famille $(u(e_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $R = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u(e_k) = u\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k\right) = u(Q_R)$ où l'on a posé $Q_R = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$. L'endomorphisme u est surjectif en dimension finie donc bijectif ce qui démontre l'unicité de Q_R.

5. $Q_R \in \mathbb{R}_1[X]$ donc il existe deux réels a, b tels que $\forall t \in \mathbb{R},\quad Q_R(t) = at+b$ donc on a

$$\begin{aligned} R &= u(Q_R) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{x}{6} = \int_x^{x+1} (at+b)\,dt \Leftrightarrow \frac{x}{6} = ax + \frac{a}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{6}e_1 = ae_1 + \left(\frac{a}{2}+b\right)e_0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{a}{2} + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = -\dfrac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow Q_R : t \mapsto \frac{1}{6}t - \frac{1}{12} = \frac{2t-1}{12}. \end{aligned}$$

6. (a) Puisque f est une densité de X alors on a : $\forall k \in X_d(\Omega),\quad P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx$. Si $k < 0$ alors $k+1 \leqslant 0$ ou si $k \geqslant N+1$ alors $P(X_d = k) = \int_k^{k+1} 0dx = 0$. Par conséquent, on a $X_d(\Omega) = \{0,..,N\}$ et $\forall k \in X_d(\Omega),\quad P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_k^{k+1} Q(x)\,dx = u(Q)(k)$. On conclut en remarquant que $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

   (b) On pose $R : x \mapsto \frac{x}{6}$, d'après la question **5**, le polynôme $Q_R : x \mapsto \frac{2x-1}{12}$ vérifie $u(Q_R) = R$ et d'après la question **4**, c'est le seul polynôme vérifiant cette relation (pour tout degré $n \geqslant 1$). S'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et une variable aléatoire X de densité f tels que

$$\forall k \in Y(\Omega),\quad P(Y = k) = \frac{k}{6} \text{ et } \forall x \in [0,4[,\quad f(x) = Q(x)$$

   alors, d'après la question précédente, $u(Q) = R \Leftrightarrow Q = Q_R \Rightarrow \forall x \in [0,4[,\quad f(x) = \frac{2x-1}{12}$. Or cette dernière fonction est strictement négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ ce qui est absurde pour une densité.

PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

1. On dispose de la majoration $\forall k \in \mathbb{N},\quad |g'(x+k)| \leqslant \frac{C}{(1+x+k)^2} \leqslant \frac{C}{(1+k)^2}$. La série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{C}{(k+1)^2} = C\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+1)^2} = C\sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{j^2}$ étant convergente (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0} g'(x+k)$ converge absolument donc converge. Puisque g est décroissante et dérivable, la fonction g' est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) Pour tout entier k, la fonction $\varphi : t \mapsto g'(t+k)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad |\varphi'(t)| = |g''(t+k)| \leqslant \frac{C}{(1+t+k)^2} \leqslant \frac{C}{(1+k)^2}$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a $\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2,\quad \forall k \in \mathbb{N},\quad |\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}$ ce qui est l'inégalité attendue.

(b) $|f(x)-f(a)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(g'(a+k)-g'(x+k))\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}|g'(a+k)-g'(x+k)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{C|x-a|}{(k+1)^2} = D|x-a|$

où l'on a posé $D = C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$ (somme d'une série convergente donc ce réel a bien un sens). Puisque $\lim_{x\to a} D|x-a| = 0$, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ c'est-à-dire que f est continue en tout réel positif a.

3. (a) $\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} = \frac{1}{(t+k+1)(t+k)} \geqslant \frac{1}{(t+k+1)(t+k+1)} = \frac{1}{(t+k+1)^2}$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}|R_N(t)| &\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty}|g'(t+k)| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{C}{(t+k+1)^2} \leqslant C\sum_{k=N+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{t+k}-\frac{1}{t+k+1}\right)\\ &\underset{(*)}{=} C\left(\frac{1}{t+N+1} - \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t+k+1}\right) = \frac{C}{t+N+1} \leqslant \frac{C}{N+1}\end{aligned}$$

$(*)$: il s'agit d'une somme télescopique donc pour tout $r \geqslant N+1$, on a

$$\sum_{k=N+1}^{r}\left(\frac{1}{t+k}-\frac{1}{t+k+1}\right) = \frac{1}{t+N+1} - \frac{1}{t+r+1} \underset{r\to+\infty}{\to} \frac{1}{t+N+1}$$

(b) Puisque $f = S_N + R_N$, on a $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 S_N(t)\,dt + \int_0^1 R_N(t)\,dt$ et comme S_N est la somme d'un nombre fini de termes, on a

$$\int_0^1 S_N(t)\,dt = -\sum_{k=0}^{N}\int_0^1 g'(t+k)\,dt = -\sum_{k=0}^{N}[g(t+k)]_{t=0}^{t=1} = -\sum_{k=0}^{N}(g(k+1)-g(k)) = g(0)-g(N+1).$$

(c) La série $\sum_{k\geqslant 0} g(k)$ converge donc son terme général tend vers 0 c'est-à-dire $\lim_{k\to+\infty} g(k) = 0$. D'autre part, pour tout entier N, on a $\left|\int_0^1 R_N(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |R_N(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{C}{N+1}dt = \frac{C}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 R_N(t)\,dt = 0$. En faisant tendre N vers $+\infty$ dans la relation $\int_0^1 f(t)\,dt = g(0)-g(N+1)+\int_0^1 R_N(t)\,dt$,on en déduit que $\int_0^1 f(t)\,dt = g(0)$.

4. (a) $f(t+1)-f(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+1+k) + \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) = -\sum_{j=1}^{+\infty} g'(t+j) + \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) = g'(t)$. Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\,dt = F(x+1)-F(x)$ où F est une primitive de la fonction f. La fonction φ est donc dérivable de dérivée $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \varphi'(x) = F'(x+1)-F'(x) = f(x+1)-f(x) = g'(x)$ donc il existe un réel A tel que

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \varphi(x) = g(x)+A \Rightarrow \varphi(0) = g(0)+A\\ \Leftrightarrow\ &\int_0^1 f(t)\,dt = g(0)+A \Leftrightarrow A = 0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \varphi(x) = g(x).\end{aligned}$$

(b) A l'aide de la relation de Chasles, on a $S_N = \int_0^1 f + \int_1^2 f + \cdots + \int_{N-1}^{N} f = \sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1} f = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$. En outre, on dispose de l'inégalité $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ et la fonction f étant continue, positive sur $\mathbb{R}_+$,

on a l'encadrement suivant : $\displaystyle\int_0^{\lfloor x\rfloor} f(t)\,dt \leqslant \int_0^{x} f(t)\,dt \leqslant \int_0^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)\,dt \Leftrightarrow S_{\lfloor x\rfloor} \leqslant \int_0^{x} f(t)\,dt \leqslant S_{\lfloor x\rfloor+1}$.
Etant donné que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} g(k)$ converge et que sa somme vaut 1, on peut affirmer que la suite $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} g(k)$ converge vers 1. Lorsque $x \to +\infty$, $\lfloor x\rfloor \to +\infty$ donc $S_{\lfloor x\rfloor} \to 1$ ainsi que $S_{\lfloor x\rfloor+1}$ et le théorème d'encadrement montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} f(t)\,dt = 1$. Autrement dit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et sa valeur est 1.

(c) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}^*$, positive sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} f$ converge et vaut 1 donc f est peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on a $P(X_d = k) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt = 0$ si $k < 0$ (donc $k+1 \leqslant 0$) et si $k \geqslant 0$ alors $P(X_d = k) = \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt = g(k) = P(Y = k)$ donc la loi de X_d est celle de Y.

RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10 et un écart-type de 5,4, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Bien traitée en général.
2. Une majorité des candidats sait démontrer la positivité des valeurs propres mais bien peu que les valeurs propres sont réelles (alors qu'ils ont justifié le caractère symétrique réel de la matrice B).
3. Pour la première égalité, une part très importante des candidats ne se soucie pas du problème de commutation des matrices A et ${}^tA$ (en général $(AB)^k \neq A^kB^k$) pour établir l'égalité demandée. Pour les valeurs propres possibles, les réponses sont correctes pour ceux ayant répondu à la question (i.e. ayant fait le lien avec les polynômes annulateurs essentiellement).
4. Seuls les meilleurs candidats ont traité correctement la question. La plupart des candidats confond les symboles « $\exists$ » et « $\forall$ » dans les hypothèses vérifiées par A et conclut la question en posant $k = 2$ dans l'égalité obtenue à la question précédente.

5. Une grosse moitié des candidats sait démontrer au moins l'une des quatre inclusions possibles et près de 40 % d'entre eux démontrent au moins une égalité ou deux inclusions.
6. Seuls les meilleurs candidats (10 %) ont traité correctement la question.

EXERCICE 2

1. (a) La justification de l'égalité $a = b$ a été relativement sélective. Des candidats passent d'un système à deux équations à une seule équation qui leur fournit l'égalité $a = b$. Malheureusement, ayant oublié l'autre équation, ils pensent que tous les couples (a, a) sont points critiques de f ce qui n'est pas le cas et les a induit en erreur pour le reste de la question.
   (b) Etonnament, seul un candidat sur deux traite correctement toute cette question (étude et conclusion) !
   (c) Tout aussi surprenant, un candidat sur deux ne fournit aucun argument sérieux en vu de la résolution de la question. Pour les autres candidats, la plupart démontre que f est majorée et conclut directement que f admet un maximum ce qui est faux (penser à la fonction $x \mapsto -e^x$ majorée par 0 sur $\mathbb{R}$ et 0 n'est pas atteint). La justification correcte que f n'est pas minorée n'est donnée que par une minorité de candidats.
2. La question est abordée par 70 % des candidats. Une (courte) majorité de ceux-ci obtient l'essentiel des points attribués à la question.
3. (a) La majorité des candidats parvient à établir la majoration $u_n \leqslant 1$ ... mais une partie des candidats oublie de justifier la minoration. La seconde majoration est plus sélective : elle est traitée correctement par un candidat sur cinq.
   (b) La moitié des candidats traite proprement la question, l'autre moitié ne fait rien de significatif.
   (c) Une petite majorité de candidats reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et donne la forme de a_n à l'aide du discriminant. La convergence de $(a_n)_n$ n'est pas toujours bien justifiée (affirmation de la convergence vers 0 car les racines sont $\leqslant 1$ (ou < 1) ou sont de valeur absolue strictement inférieure à 1 alors que le candidat ne les a même pas calculé ou que son affirmation est clairement fausse au vu du résultat qu'il vient d'obtenir ! La convergence de $(u_n)_n$ est traitée par les meilleurs candidats.

PROBLEME

PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. Un candidat sur deux sait traiter correctement cette question.
2. Bien traitée en général.

3. La notion de partie entière est mal comprise par une fraction importante de candidats. Très souvent, il est mentionné que $X_d(\Omega) = \{0, .., N\}$ sans justification et peu d'étudiants pensent à distinguer le cas $X_d = N$ ce qui amène à fréquemment à lire : $\forall k \in \{0, .., N\}, \quad P(X_d = k) = \frac{1}{N}$. Seuls les meilleurs candidats traitent complètement et correctement la question.
4. Une très part importante des candidats oublie de vérifier que $P(Y = k) \geqslant 0$. En général, les candidats vérifient que $\sum_{k=0}^{9} P(Y = k) = 1$ ou (exclusif en général) devinent une densité formelle f définie généralement par $f(x) = \frac{1}{\ln(10)\,x}$ sans préciser le domaine de validité de cette formule et sans vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.
5. (a) Un tiers des candidats ne fournit aucun élément de réponse substantiel à la question posée. Quasiment tous les autres fournissent une réponse correcte.
   (b) Une certaine confusion règne chez une partie des candidats : certains croient qu'il s'agit d'une variable à densité, d'autres manipulent mal la partie entière, etc. Néanmoins, près de la moitié des candidats parviennent à donner la loi de la première variable.
   (c) Cette question nécessitait une réponse correcte à la question précédente ce qui entraine que seul un candidat sur quatre a fournit une réponse correcte, les autres ne traitant pas la question ou écrivant des inepties.
   (d) Les difficultés de manipulation de la partie entière se confirment car peu de candidats sont capables de répondre correctement à la première question. Seuls les meilleurs candidats concluent convenablement.

PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

1. Si la plupart des candidats calcule bien $u(e_k)$, seul un quart des candidats fournit une réponse approximativement correctement à l'expression de $u(e_k)$ en fonction de $e_0, .., e_n$.
2. La linéarité est bien traitée mais moins de la moitié des candidats est en mesure de répondre correctement à l'autre question.
3. Si l'argument de famille échelonnée en degré est souvent mentionné (sans véritable explication hormis un mystérieux « selon les calculs précédents»), l'énoncé précis utilisé pour conclure à la question est rarement explicité. Quant à ses hypothèses, moins d'un candidat sur trois parvient à les justifier (liberté de la famille, comparaison du cardinal de la famille à la dimension de l'espace) ... en oubliant souvent de mentionner que les vecteurs considérés $u(e_k)$ appartiennent bien à $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Seuls les meilleurs candidats parviennent à répondre correctement à la question.
5. Beaucoup de candidats n'abordent pas cette question mais ceux qui l'abordent, le font généralement bien.

6. Abordée essentiellement par les meilleurs candidats.

PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

1. La moitié des candidats répondent correctement à la question, les autres ne donnant aucun élément de réponse satisfaisant.
2. Un tiers des candidats obtient des éléments significatifs de réponse aux deux questions suivantes.
   (a) Si une part importante de candidats fait le lien avec l'inégalité des accroissements finis ou l'inégalité de Taylor, assez peu sont en mesure de formaliser correctement cette intuition (mauvaise fonction considérée, majoration étonnante de la dérivée,etc.)
   (b) Les calculs sont trop souvent formels (aucune réflexion sur la convergence des séries considérées). La continuité est justifiée par une faible part des candidats.
3. Les question b) et c) sont abordées uniquement par les meilleurs copies. Pour la question a), la première inégalité est justifiée par une grande part des candidats ... mais beaucoup moins sont en mesure de justifier la seconde (peu de soucis de convergence, écriture de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{t+k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{t+k+1}$, élimination convenable du paramètre t).
4. Cette série de questions est abordée par une nombre très faible de candidats (moins de 20 %) mais un sur deux répond correctement au moins à la moitié des questions posées à un item donné.