



ANNALES
OFFICIELLES
2014

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

ÉPREUVE ÉCRITE
ÉPREUVE SPÉCIFIQUE
OPTION SCIENTIFIQUE

■ **Mathématiques**



ECRICOME
VISER PLUS HAUT

www.ecricome.org

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

■ Sujets

Deux exercices d'application des connaissances de base ;
un problème faisant largement appel aux possibilités.

■ Évaluation

Deux exercices de valeurs sensiblement égale ;
12 à 14 points pour le problème.

■ Épreuve

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = xP(x) + x \ln(x) Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$u_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^k \end{cases} \quad \text{et} \quad v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^k \ln(x) \end{cases}.$$

Pour toute fonction f appartenant à E , on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ (c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$).

On admettra que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ est une base de E .

2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}_+ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Ecrire la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .
5. L'endomorphisme φ est-il bijectif? Quelles sont ses valeurs propres?
6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ . On suppose que λ est non nul et on considère la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que g est constante sur \mathbb{R}_+^* . En déduire l'expression de la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt \text{ puis celle de } f.$$

7. Pour chaque valeur propre λ de φ , déterminer la dimension de l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On admettra que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$L(x) = \ln(\Gamma(x)) \quad \text{et} \quad \Psi(x) = L'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

- Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.
- Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}$$

puis préciser la valeur de $\Psi(n+2) - \Psi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que :

$$\forall (x, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

- Démontrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

puis justifier que la fonction Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $a \in]0, 1[$.

(a) Prouver que pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a))$$

et :

$$0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n).$$

(b) Etablir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} \text{ en fonction de } \Psi \text{ et de } a.$$

PROBLEME

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2 . Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2 . Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k , qu'il peut remporter avec une probabilité p , son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n , on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1. Simulation des duels. Rappelons que la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ (qui suit en outre la loi uniforme sur $[0, 1]$).
 - (a) Ecrire une fonction DUEL en Turbo-Pascal qui crée un nombre aléatoire et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et 0 sinon.
 - (b) Ecrire une fonction TEST_VICTOIRE en Turbo-Pascal qui, à trois nombres a, b, c fournis par l'utilisateur, renvoie TRUE si les trois sont égaux, FALSE sinon.
 - (c) Ecrire un programme TOURNOI en Turbo-Pascal simulant un tournoi et renvoyant le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi dispose d'un vainqueur (c'est-à-dire un candidat ayant remporté 3 victoires consécutives). **Indication** : Si on souhaite, on pourra utiliser les fonctions DUEL et TEST_VICTOIRE en les répétant convenablement jusqu'à ce que TEST_VICTOIRE sur trois DUEL consécutifs renvoie TRUE.
2. Créer la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels sous la forme d'un tableau de la forme suivante :

	numéro du joueur gagnant le duel	
	↓	
duel 1	0	...
duel 2	0	...
duel 3	0	...

Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$. Vérifier que :

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n , démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :

$$(\mathcal{R}_1) : P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que :

$$\forall n \geq 2, \quad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n)$.

5. Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

PARTIE II : Etude du cas général.

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0, 1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} X^k \right) - 1.$$

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du n -ième duel, le vainqueur du n -ième duel a obtenu exactement k victoires ».

Justifier l'égalité :

$$\forall n \geq N, \quad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

2. Etablir que pour tout $n \geq N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).$$

3. Calculer $P(E_1), \dots, P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geq N$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On note désormais r_N cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0.$$

6. A l'aide de la relation (\mathcal{R}_2) (*question II.2*), établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation (\mathcal{R}_3) (*question II.4*) sur tous les entiers $n \geq N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

8. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

(a) Soit $n \geq 2$. Justifier que les événements $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ et $(X = n)$ sont égaux.

(b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$.

Les hypothèses et définitions introduites à la partie II sont conservées. Les résultats de la question II.5) pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

1. On considère le polynôme :

$$R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$$

et on admet que :

$$(qX - 1)Q(X) = R(X) \quad \text{et} \quad XR'(X) - NR(X) = (N - 1)X - N.$$

Soit z un complexe tel que

$$Q(z) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z) = 0.$$

Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.

Par conséquent chaque racine complexe de Q est de multiplicité 1 donc, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, il existe $N - 1$ complexes non nuls et distincts z_1, \dots, z_{N-1} tels que :

$$Q(X) = (X - z_1) \cdots (X - z_{N-1}).$$

2. On considère l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}_{N-2}[X] & \rightarrow \mathbb{C}^{N-1} \\ S & \mapsto \left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), \dots, S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right) \right) \end{cases}$$

où z_1, \dots, z_{N-1} sont les $N - 1$ racines distinctes de Q .

- Prouver que f est un isomorphisme.
- Ecrire sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et \mathbb{C}^{N-1} .
 Expliciter tA (la transposée de A).
- En déduire que le système :

$$(S) : \begin{cases} x_1 + \cdots + x_{N-1} = P(E_1) \\ \frac{x_1}{z_1} + \cdots + \frac{x_{N-1}}{z_{N-1}} = P(E_2) \\ \vdots \\ \frac{x_1}{(z_1)^{N-2}} + \cdots + \frac{x_{N-1}}{(z_{N-1})^{N-2}} = P(E_{N-1}) \end{cases}$$

admet une unique solution $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$.

3. Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$ l'unique solution du système (S) (cf. question III.2c), on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{\alpha_1}{(z_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{N-1}}{(z_{N-1})^{n-1}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \geq N$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}$$

En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$P(E_n) = u_n.$$

CORRIGÉ

EXERCICE 1

- $E \subset \mathcal{E}$ où \mathcal{E} est le \mathbb{R} -espace Vectoriel des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles.
 - $E \neq \emptyset$, puisque la fonction nulle appartient clairement à E .
 - Soient $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $\forall x > 0, f(x) = xP_1(x) + x \ln(x)Q_1(x)$ et $\forall x > 0, g(x) = xP_2(x) + x \ln(x)Q_2(x)$ avec $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'où :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, (\lambda f + g)(x) &= \lambda f(x) + g(x) = \lambda(xP_1(x) + x \ln(x)Q_1(x)) + xP_2(x) + x \ln(x)Q_2(x) \\ &= x(\lambda P_1 + P_2)(x) + x \ln(x)(\lambda Q_1 + Q_2)(x), \end{aligned}$$

d'où $\lambda f + g$ est encore un élément de E : E est stable par combinaison linéaire.

L'ensemble E est donc un sous-espace Vectoriel de \mathcal{E} , donc un \mathbb{R} -espace Vectoriel.

- Puisque pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k \in E$ et $v_k \in E$, on a donc $\text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \subset E$, puisque E est stable par combinaison linéaire.
- Soit $f \in E$. Il existe alors deux polynômes P, Q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que : $\forall x > 0, f(x) = xP(x) + x \ln(x)Q(x)$.

Puisque $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $(x \mapsto xP(x)) \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

De même, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $(x \mapsto x \ln(x)Q(x)) \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Ainsi, par somme, $f \in \text{Vect}(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$. On a donc $E \subset \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$.

Finalement par double inclusion, $\boxed{E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)}$.

- Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction u_k est polynomiale, donc continue sur $]0, +\infty[$ et telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_k(x) = 0$
 - Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction v_k est continue sur $]0, +\infty[$ et par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} v_k(x) = 0$.
 - Ainsi, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, u_k et v_k sont prolongeables par continuité en 0 en posant $u_k(0) = v_k(0) = 0$.
 - Ainsi, les éléments de \mathcal{B} sont des fonctions prolongeables par continuité sur $[0, +\infty[$, d'où par combinaison linéaire, tout élément de E est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, \varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^k dt = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_0^x = \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{k+1} u_k(x).$$

On a donc :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(u_k) = \frac{1}{k+1} u_k.}$$

$$\forall x > 0, \varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t^k \ln(t) dt.$$

L'intégrale apparaissant étant bien convergente puisque la fonction $t \mapsto t^k \ln(t)$ est prolongeable par continuité sur $[0, x]$ pour tout réel $x > 0$.

Fixons $x > 0$ et $\varepsilon \in]0, x]$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{k+1} t^{k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[\varepsilon, x]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_{\varepsilon}^x t^k \ln(t) dt = \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \ln(t) \right]_{\varepsilon}^x - \frac{1}{k+1} \int_{\varepsilon}^x t^k dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{k+1} \ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \quad (\text{croiss.comp.})$$

D'où :

$$\forall x > 0, \varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{x^{k+1} \ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{k+1} x^k \ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2} x^k.$$

On a donc :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1} v_k - \frac{1}{(k+1)^2} u_k.}$$

EXERCICE 2

1. Fixons $x > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a donc deux problèmes à étudier.

- En 0. On a $|(\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln(t)|^k t^{x-1}$.

Cherchons $\alpha < 1$ tel que $|\ln(t)|^k t^{x-1} = \underset{t \rightarrow 0}{o} \left(\frac{1}{t^\alpha} \right) \iff t^{\alpha+x-1} |\ln(t)|^k \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. C'est vérifié dès que $\alpha + x - 1 > 0$, i.e. $\alpha > 1 - x$ d'après les croissances comparées.

Prenons donc $\alpha = \frac{1+(1-x)}{2} = 1 - \frac{x}{2}$. Alors :

$$|(\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}| = \underset{t \rightarrow 0}{o} \left(\frac{1}{t^{1-x/2}} \right).$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x/2}} dt$ étant convergente (Riemann), par critère de négligeabilité pour les fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

- En $+\infty$. On a :

$$t^2 (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{croissances comparées}) \implies (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ étant convergente (Riemann), par critère de négligeabilité pour les fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

- Par relation de Chasles sur les intégrales convergentes, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est bien convergente.

2. On sait que :

$$\boxed{\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}.$$

En dérivant membre à membre cette égalité (on a admis que la fonction Γ étant bien dérivable), on en déduit que :

$$\forall x > 0, \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x).$$

D'où :

$$\forall x > 0, \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \boxed{\frac{1}{x}}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Psi(n+2) - \Psi(n) = \Psi(n+2) - \Psi(n+1) + \Psi(n+1) - \Psi(n) = \boxed{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}.$$

3. Soit $x > 0$ fixé. Soit $(\varepsilon, A) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon < A$.

En posant $f : t \mapsto \ln(t)e^{-t/2}t^{(x-1)/2}$ et $g : t \mapsto e^{-t/2}t^{(x-1)/2}$, on a par positivité de l'intégrale sur le segment $[\varepsilon, A]$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_{\varepsilon}^A (f(t) + \lambda g(t))^2 dt \geq 0.$$

D'où :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_{\varepsilon}^A f^2(t) dt + 2 \left(\int_{\varepsilon}^A f(t)g(t) dt \right) \lambda + \left(\int_{\varepsilon}^A g^2(t) dt \right) \lambda^2 \geq 0.$$

Puisque $\int_{\varepsilon}^A g^2(t) dt \neq 0$ (la fonction g est continue, positive, jamais nulle sur $[\varepsilon, A]$), l'expression précédente est un polynôme de degré 2 en λ de signe constant (positif), donc son discriminant est négatif. On en déduit que :

$$4 \left(\int_{\varepsilon}^A f(t)g(t) dt \right)^2 - 4 \left(\int_{\varepsilon}^A f^2(t) dt \right) \left(\int_{\varepsilon}^A g^2(t) dt \right) \leq 0.$$

autrement dit :

$$\left(\int_{\varepsilon}^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_{\varepsilon}^A \ln^2(t)e^{-t}t^{x-1} dt \right) \left(\int_{\varepsilon}^A e^{-t}t^{x-1} dt \right).$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'inégalité, toutes les intégrales apparaissant étant bien convergentes d'après la question 1, on en déduit que :

$$\boxed{\left(\int_0^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A \ln^2(t)e^{-t}t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t}t^{x-1} dt \right)}.$$

4. De même, en faisant tendre $A \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité, toutes les intégrales apparaissant étant bien convergentes d'après la question 1, on en déduit que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} \ln^2(t)e^{-t}t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt \right),$$

autrement dit :

$$\boxed{(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma''(x)\Gamma(x)}.$$

La fonction Ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant jamais. De plus, on a :

$$\forall x > 0, \quad \Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \geq 0.$$

La fonction Ψ est donc croissante sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $a \in]0, 1[$.

(a) Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k+a} \right) \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{k=1}^n ((\Psi(k-a+1) - \Psi(k-a)) - (\Psi(k+a+1) - \Psi(k+a))) \\ &= \frac{1}{2a} ((\Psi(n-a+1) - \Psi(1-a)) - (\Psi(n+a+1) - \Psi(1+a))) \quad (\text{sommées télescopiques}) \\ &= \boxed{\frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n+a+1) - \Psi(n-a+1))}. \end{aligned}$$

La fonction Ψ étant par ailleurs croissante, avec $0 < a < 1$, puisque $n \leq n+1-a \leq n+1+a \leq n+2$, on a :

$$\Psi(n) \leq \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+1+a) \leq \Psi(n+2).$$

D'où on en déduit bien l'encadrement :

$$\boxed{0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n)}.$$

(b) En utilisant la question 2, on a donc :

$$0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

D'où par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)) = 0$. On en déduit donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a)).$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est donc convergente, et on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a))}.$$

PROBLÈME

Partie I

1. (a)
- ```

FUNCTION DUEL : INTEGER ;
BEGIN
 IF random < 1/2
 THEN DUEL:=1
 ELSE DUEL:=0 ;
END ;

```
- (b)
- ```

FUNCTION TEST_VICTOIRE(a,b,c : INTEGER) : BOOLEAN ;
BEGIN
    TEST_VICTOIRE := ((a=b)AND(b=c)) ;
END ;
    
```
- (c)
- ```

PROGRAM TOURNOI ;
VAR a,b,c,n : INTEGER ;
FUNCTION DUEL : INTEGER ;
 BEGIN IF random < 1/2 THEN DUEL:=1 ELSE DUEL:=0 ; END;
FUNCTION TEST_VICTOIRE(a,b,c : INTEGER) : BOOLEAN ;
 BEGIN TEST_VICTOIRE := ((a=b)AND(b=c)) ; END ;
BEGIN
 RANDOMIZE;
 a:= DUEL ;
 b:= a+DUEL ;
 c:= b+DUEL ;
 n:=3;
 WHILE TEST_VICTOIRE(a,b,c) <> TRUE
 DO
 BEGIN
 a:=b ; b:=c ; c:=c+DUEL ; n := n+1 ;
 END ;
 WRITELN('Le nombre de duels nécessaires a été de ',n) ;
END.

```
2. Liste des gagnants possibles :

|        |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|
| duel 1 | 0 | 1 |   |   |
| duel 2 | 0 | 1 | 2 |   |
| duel 3 | 0 | 1 | 2 | 3 |

$E_1$  et  $E_2$  sont des événements certains. En effet, le premier "gagnant du tournoi" possible ne peut être désigné au minimum qu'à l'issue du duel 3. On a donc :

$$P(E_1) = P(E_2) = 1$$

De plus, l'événement  $E_3$  a pour événement contraire  $\overline{E_3}$  correspond au fait que le joueur 0 ou le joueur 1 gagne les trois premiers tournois. En notant  $O_k$  "le joueur  $A_0$  gagne le duel  $k$ " et  $I_k$  "le joueur  $A_1$  gagne

le duel  $k$ ", on a donc :

$$\begin{aligned} P(E_3) &= 1 - P(\overline{E_3}) = 1 - P(O_1 \cap O_2 \cap O_3) - P(I_1 \cap I_2 \cap I_3) \\ &= 1 - P(O_1)P_{O_1}(O_2)P_{O_1 \cap O_2}(O_3) - P(I_1)P_{I_1}(I_2)P_{I_1 \cap I_2}(I_3) = 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a :

$$\frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = P(E_3)$$

3. Soit  $n \geq 3$ . Notons  $G_n$  l'événement "il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro  $n$  et le vainqueur du duel numéro  $n$  est le joueur  $A_n$  (et marque donc au duel  $n$  sa première victoire)". Notons  $H_n$  l'événement "il n'y a pas encore eu de gagnant du tournoi à l'issue du duel numéro  $n$  et le vainqueur du duel numéro  $n$  est le joueur  $A_{n-1}$  (et marque donc au duel  $n$  sa seconde victoire)".

Alors  $E_n = G_n \cup H_n$  avec  $G_n \cap H_n = \emptyset$ . D'où :  $P(E_n) = P(G_n) + P(H_n)$ .

De plus,  $G_n = E_{n-1} \cap T_n$  où  $T_n$  : "le joueur  $A_n$  gagne le duel  $n$ ".

Ainsi :  $P(G_n) = P(E_{n-1})P_{E_{n-1}}(T_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1})$ .

De même,  $H_n = E_{n-2} \cap U_{n-1} \cap U_n$  où  $U_k$  : "le joueur  $A_{n-1}$  gagne le duel  $k$ ".

Ainsi :  $P(H_n) = P(E_{n-2})P_{E_{n-2}}(U_{n-1})P_{E_{n-2} \cap U_{n-1}}(U_n) = \frac{1}{4}P(E_{n-2})$ .

On a donc finalement :

$$P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2})$$

4. La suite  $(P(E_n))_{n \geq 1}$  est donc récurrente linéaire double, et a pour équation caractéristique  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \iff 4x^2 - 2x - 1 = 0$ . L'équation admet deux solutions réelles qui sont  $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$  et  $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ . Il existe donc deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que :

$$\forall n \geq 1, P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Puisque  $2 < \sqrt{5} < 3$ , on a  $|r_1| < 1$  et  $|r_2| < 1$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0$$

5. Pour tout  $n \geq 1$ , si  $E_n$  est réalisé (le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro  $n$ ), alors le gagnant n'avait pas été désigné à l'issue des duels précédents,  $E_{n-1}$  est donc nécessairement réalisé. Ainsi :

$$\forall n \geq 1, E_n \subset E_{n-1}$$

La suite d'événements  $(E_n)$  étant décroissante, le Théorème de la Limite Monotone affirme que :

$$P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = 0$$

L'événement "on ne désignera jamais de gagnant au tournoi" est ainsi négligeable. Son événement contraire, "le tournoi désignera un vainqueur", est alors presque-sûr, de probabilité 1.

## Partie II

1. Soit  $n \geq N$  et soit  $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ .

Si on suppose que l'événement  $A_k^{(n)}$  est réalisé, le vainqueur du  $n$ -ième duel a obtenu exactement  $k$  victoires ( $k < N$ ), donc c'est exactement le joueur  $A_{n-k+1}$  qui a gagné les  $k$  derniers duels, et qui n'est pas gagnant du tournoi (puisque  $k < N$ ). Le gagnant du tournoi a pu être désigné au préalable avant l'apparition de  $A_{n-k+1}$ , ou n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro  $n$ .

Le fait que le gagnant du tournoi n'ait pas été désigné à l'issue du  $n$ -ième duel revient donc au fait que le gagnant du tournoi n'ait pas été désigné avant les duels gagnés par  $A_{n-k+1}$ , donc autrement dit à l'issue du duel  $n-k$ . Ainsi, sachant  $A_k^{(n)}$ ,  $E_n$  est réalisé si et seulement si  $E_{n-k}$  est réalisé.

$$P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k})$$

Or,  $E_{n-k}$  est indépendant de  $A_k^{(n)}$  puisque ne dépendant que des résultats des  $n-k$  premiers duels, alors que  $A_k^{(n)}$  dépend uniquement de l'issue des  $k$  derniers duels. Ainsi :

$$P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k})$$

2. Notons plus généralement  $A_k^{(n)}$  l'événement "à l'issue du  $n$ -ième duel, le vainqueur du  $n$ -ième duel a obtenu exactement  $k$  victoires" pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Ainsi,  $(A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_n^{(n)})$  est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^n P(E_n \cap A_k^{(n)}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(E_n \cap A_k^{(n)}) \quad (\text{car si } k \geq N, E_n \cap A_k^{(n)} = \emptyset) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P_{A_k^{(n)}}(E_n) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P(E_{n-k}) \end{aligned}$$

Or, pour  $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ , l'événement  $A_k^{(n)}$  est réalisé si et seulement si le joueur  $A_{n-k+1}$  remporte ses  $k$  premiers duels. Il a une probabilité  $p$  de remporter le duel  $n-k+1$ , puis une probabilité  $q$  de remporter les  $k-1$  suivants, donc  $P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}$  et ainsi :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k})$$

3. Comme il est nécessaire d'avoir au moins  $N$  duels successifs pour que le gagnant du tournoi ait été désigné, le gagnant peut être désigné au plus tôt à l'issue du  $N$ -ième duel. Ainsi,  $E_1, E_2, \dots, E_{N-1}$  sont des événements certains. On a :

$$P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_{N-1}) = 1$$

On en déduit d'après la question précédente que :

$$P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{N-1} (q^{k-1} - q^k) = \boxed{1 - q^{N-1}}$$

4. Soit  $n \geq N$ . D'après la question 2, on a :

$$\begin{aligned}
 P(E_n) - P(E_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n+1-k}) \\
 &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-2} pq^kP(E_{n-k}) \\
 &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-1} pq^kP(E_{n-k}) + pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) \\
 &= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p(q^{k-1} - q^k)P(E_{n-k}) - pP(E_n) \\
 &= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + \sum_{k=1}^{N-1} p^2q^{k-1}P(E_{n-k}) - pP(E_n) \\
 &= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + p \left( \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - P(E_n) \right) \\
 &= \boxed{pq^{N-1}P(E_{n-N+1})}
 \end{aligned}$$

5. La fonction  $x \mapsto Q(x)$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$ . De plus, on a :  $\forall x > 0$ ,  $Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}kx^{k-1} > 0$ . La fonction  $Q$  est donc continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , donc réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $]Q(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x)[ = [-1, +\infty[$ . Puisque  $0 \in [-1, +\infty[$ , l'équation  $Q(x) = 0$  admet donc bien une et une seule solution dans  $]0, +\infty[$ .

Remarquons que  $Q(1) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} - 1 = p \frac{1-q^{N-1}}{1-q} - 1 = -q^{N-1} < 0 = Q(r_N)$ , donc par stricte croissance de  $Q$  sur  $]0, +\infty[$ , on a nécessairement  $r_N > 1$ .

De plus, puisqu'on a établi que  $\forall x > 1$ ,  $Q'(x) > 0$ , en particulier,  $Q'(r_N) > 0$ .

6. • Puisque  $P(E_1) = 1$  et que  $r_N > 1$ , on a bien  $r_N^{N-1} \geq 1$ , donc :  $P(E_1) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{1-N}$ .  
 • Soit  $n \geq 1$ . Supposons qu'on ait montré que  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $P(E_k) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{k-N}$ . Alors, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}
 P(E_n) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) \leq \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N} \\
 &= \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}r_N^k = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} (Q(r_N) + 1) = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}
 \end{aligned}$$

• Par récurrence forte, la propriété est bien vérifiée pour tout entier  $n \geq 1$ .

7.  $r_N > 1$ , donc  $\left|\frac{1}{r_N}\right| < 1$ . La série de terme général  $\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$  est donc convergente (série géométrique). Par critère de comparaisons pour les séries à termes positifs, la série de terme général  $P(E_n)$  converge également.

De plus, pour tout  $K \geq N$ , on a :

$$\sum_{n=N}^K (P(E_n) - P(E_{n+1})) = pq^{N-1} \sum_{n=N}^K P(E_{n-N+1})$$

autrement dit (somme télescopique),

$$P(E_N) - P(E_{N-K+1}) = pq^{N-1} \sum_{n=1}^{K-N+1} P(E_n)$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{K-N+1} P(E_n) = \frac{1}{pq^{N-1}} (P(E_N) - P(E_{N-K+1}))$$

Enfin, puisque la série de terme général  $P(E_n)$  converge, on a nécessairement  $\lim_{K \rightarrow +\infty} P(E_{N-K+1}) = 0$ ,

d'où :

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{K-N+1} P(E_n) = \frac{1}{pq^{N-1}} P(E_N) = \frac{1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}}}$$

8. (a) Soit  $n \geq 2$ . L'événement  $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$  est réalisé si et seulement si le vainqueur du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du  $(n-1)$ -ième duel, mais l'est à l'issue du  $n$ -ième duel. Cet événement est donc réalisé si et seulement si le vainqueur est proclamé lors du duel numéro  $n$ , i.e. si et seulement si  $[X = n]$  est réalisé. On a donc :

$$E_{n-1} \cap \overline{E_n} = [X = n]$$

- (b) Pour tout  $K \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K kP(X = k) &= \sum_{k=2}^K kP(X = k) \quad (\text{car } [X = 1] = \emptyset) \\ &= \sum_{k=2}^K kP(E_{k-1} \cap \overline{E_k}) \\ &= \sum_{k=2}^K k(P(E_{k-1}) - P(E_k)) \quad (\text{car } E_n \subset E_{n-1}) \\ &= \sum_{k=2}^K kP(E_{k-1}) - \sum_{k=2}^K kP(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{K-1} (k+1)P(E_k) - \sum_{k=1}^K kP(E_k) \\ &= 2P(E_1) + \sum_{k=2}^{K-1} (k+1-k)P(E_k) - KP(E_K) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{K-1} P(E_k) - KP(E_K) \end{aligned}$$

Or,  $\forall K \geq 1, 0 \leq KP(E_K) \leq \frac{K}{r^{K-N}} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 0$  (croissances comparées), on en déduit donc que :

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^K kP(X=k) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k)$$

La série de terme général  $kP(X=k)$  converge donc (absolument),  $X$  admet bien une espérance et :

$$E(X) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k) = \boxed{1 + \frac{1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}}}$$

### Partie III

1. Soit  $z$  un complexe tel que  $Q(z) = 0$ . On a alors :

$$R(z) = (qz - 1)Q(z) = 0$$

De plus, en dérivant la relation  $(qX - 1)Q(X) = R(X)$ , on obtient que  $R'(X) = qQ(X) + (qX - 1)Q'(X)$ , d'où :

$$R'(z) = qQ(z) + (qz - 1)Q'(z) = 0$$

Or, on sait que  $R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$ , donc  $R'(X) = -1 + Npq^{N-1}X^{N-1}$ .

Puisque  $R'(z) = 0$ , on a nécessairement  $Npq^{N-1}z^{N-1} = 1$ , d'où  $z^{N-1} = \frac{1}{Npq^{N-1}}$ . Enfin,  $R(z) = 0$ , donc :

$$1 - z + pq^{N-1}z^N = 0 \implies z = 1 + pq^{N-1}z^{N-1}z = 1 + \frac{1}{N}z \implies z \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 \implies z = \frac{N}{N-1} \in [0, +\infty[$$

Or,  $Q$  admet une unique racine réelle positive qui est  $R_N$ , et qui ne vérifie pas  $Q'(R_N) = 0$ .

Cela contredit la définition de  $z$ . Ainsi,  $Q$  ne peut pas admettre de racine multiple (complexe ou réelle).

2. (a) • Soient  $S$  et  $T$  deux polynômes de  $\mathbb{C}_{N-2}[X]$  et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda S + T) &= \left( (\lambda S + T) \left( \frac{1}{z_1} \right), \dots, (\lambda S + T) \left( \frac{1}{z_{N-1}} \right) \right) \\ &= \lambda \left( S \left( \frac{1}{z_1} \right), \dots, S \left( \frac{1}{z_{N-1}} \right) \right) + \left( T \left( \frac{1}{z_1} \right), \dots, T \left( \frac{1}{z_{N-1}} \right) \right) \\ &= \lambda f(S) + f(T) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est bien une application linéaire.

- Soit  $S \in \text{Ker}(f)$ . On a alors  $f(S) = 0$ , i.e.  $\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, S \left( \frac{1}{z_k} \right) = 0$ . Ainsi, le polynôme  $S$  est de degré au plus  $N-2$ , et admet au moins  $N-1$  racines complexes distinctes. Il est donc nul. On a donc  $\text{Ker}(S) = \{0\}$ . L'application  $S$  est donc injective, et puisque  $\dim(\mathbb{C}_{N-2}[X]) = \dim(\mathbb{C}^{N-1}) = N-1$ , l'application  $S$  est même bijective : c'est un isomorphisme.

- (b) La matrice de  $A$  dans les bases canoniques est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_1^2} & \cdots & \frac{1}{z_1^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_2^2} & \cdots & \frac{1}{z_2^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_3} & \frac{1}{z_3^2} & \cdots & \frac{1}{z_3^{N-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{z_{N-1}} & \frac{1}{z_{N-1}^2} & \cdots & \frac{1}{z_{N-1}^{N-2}} \end{pmatrix}$$

et sa transposée est alors donnée par :

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_3} & \cdots & \frac{1}{z_{N-1}} \\ \frac{1}{z_1^2} & \frac{1}{z_2^2} & \frac{1}{z_3^2} & \cdots & \frac{1}{z_{N-1}^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{z_1^{N-2}} & \frac{1}{z_2^{N-2}} & \frac{1}{z_3^{N-2}} & \cdots & \frac{1}{z_{N-1}^{N-2}} \end{pmatrix}$$

(c) Puisque  $f$  est un isomorphisme, la matrice  $A$  est inversible. La matrice  ${}^t A$  qui est de rang égal au rang de  $A$ , est également inversible. Pour toute matrice colonne  $Y \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$ , il existe donc une

unique matrice  $X \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$  telle que  ${}^t A X = Y$ . En particulier, pour  $Y = \begin{pmatrix} P(E_1) \\ \vdots \\ P(E_{N-1}) \end{pmatrix}$ , il

existe un et un seul  $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{C})$  vérifiant  ${}^t A X = Y$ , i.e. solution du système

(S) proposé.

3. Pour tout  $n \geq N$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k} &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} z_j^k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} (Q(z_j) + 1) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} \\ &= u_n \end{aligned}$$

Les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(P(E_n))_{n \geq 1}$  coïncident sur  $\llbracket 1, N-1 \rrbracket$  d'après 2(c), et vérifient la même relation de récurrence, donc sont égales. On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \geq 1, P(E_n) = u_n}$$

## RAPPORT

### COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 9,9 et un écart-type de 5,1, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

### COMMENTAIRES PARTICULIERS

#### EXERCICE 1

1. Cette question s'est avérée discriminante. Un tiers des candidats s'est avéré incapable de justifier l'une des assertions proposées (on voyait fleurir souvent l'affirmation  $E \subset \mathbb{R}$ , etc.). Un tiers des candidats a très bien traité ces questions et un dernier tiers a donné des justifications partielles ( $E \subset \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$  donc  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice,  $E \subset \mathbb{R}$  sont les plus fréquentes).
2. La question est bien traitée par la majeure partie des candidats (plus de 75 %).
3. La question est bien traitée par la majeure partie des candidats (plus de 75 %).
4. Près des deux tiers des candidats donnent la bonne réponse.
5. La moitié des candidats donne une argumentation convenable même si le lien entre matrice et endomorphisme est oublié par certains candidats.
6. Cette question fut plus discriminante, si un petit tiers des candidats parvient à justifier la constance de  $g$ , seule la moitié d'entre eux parvient à conclure à la question.

7. La question étant une synthèse des résultats obtenus précédemment, seules les meilleures copies ont donné la réponse convenable (ou la réponse à une des deux questions).

## EXERCICE 2

- Moins de la moitié des copies fournit des éléments de réponses substantielles (convergence sur  $[1, +\infty[$  essentiellement et des tentatives maladroites sur  $]0, 1]$ ), seuls 10 % des copies ont donné une réponse satisfaisante.
- L'immense majorité des candidats a donné une réponse correcte aux deux premières questions et plus d'un tiers a répondu correctement aux trois questions.
- Un quart des candidats a pu fournir un argumentaire convenable à cette question en explicitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales (ou en invoquant un produit scalaire sur un espace de fonctions continues) en oubliant parfois les problèmes de convergence de l'intégrale en 0. Seules les meilleures copies ont levé toutes les difficultés présentes.
- Plus de la moitié des candidats a répondu correctement en oubliant parfois de faire tendre  $A$  vers  $+\infty$ .
- Un candidat sur six a traité complètement et convenablement cette question et un autre sixième des candidats n'a répondu qu'à une des deux questions (généralement l'encadrement).
  - La moitié des candidats a justifié l'une des deux questions (un partage équitable entre la convergence de la série et la somme de la série (sous réserve de la convergence)) la moitié de ceux-ci (soit un quart des candidats) a répondu correctement aux deux questions.

## PROBLEME

### PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

La plupart des questions de cette partie ont été abordées par plus des trois quarts des candidats.

- La majorité des candidats a abordé ces questions d'informatiques (plus des trois quarts). La première question est réussie par les trois quarts (avec couramment des erreurs de syntaxe du type « if a = b = c »), la seconde n'est correctement menée que par 40 % et la dernière par moins d'un candidat sur dix.
- Une large majorité des candidats a bien répondu à cette question même si certains ont forcé le résultat pour obtenir la dernière égalité  $P(E_3) = \dots$ . Si cette égalité est mentionnée par le sujet, c'est pour permettre aux candidats d'avoir un test de cohérence de leurs calculs précédents donc le correcteur attend une justification honnête et cohérente (au vu des calculs précédents du candidat).

3. Seuls les meilleurs candidats (environ 10 %) donnent une justification raisonnable (soit par des événements disjoints et du conditionnement, soit par un véritable système complet d'événements).
4. Les réponses sont convaincantes pour la majorité des candidats (60 %) même si certains ne justifient pas la valeur de la limite.
5. Un bon tiers des candidats donne une réponse satisfaisante avec l'utilisation adéquate de théorèmes du cours, ce qui était indispensable pour les correcteurs à cette question.

## PARTIE II : Etude du cas général.

La plupart des questions de cette partie ont été abordées par 40 à 50% des candidats.

1. Près d'un tiers des candidats est parvenu à expliquer cette égalité en français (ce qui était l'attente des correcteurs).
2. Cette question n'est correctement réussie que par les meilleurs candidats même si près d'un candidat sur quatre devine l'origine de cette formule mais les explications sont partielles (système complet d'événements ou valeur de  $P\left(A_k^{(n)}\right)$ ).
3. Généralement, les candidats sachant justifier la valeur des probabilités  $P(E_1), \dots, P(E_{N-1})$  parviennent à justifier la valeur de  $P(E_N)$ . Malheureusement, ils représentent moins de 20% des candidats.
4. Cette question n'est réussie que par les meilleures copies.
5. Un quart des candidats justifie l'existence et l'unicité de  $r_N$  et la moitié d'entre eux répond correctement aux deux autres questions.
6. La question est très peu abordée et elle n'est réussie que par quelques dizaines de candidats.
7. La convergence est justifiée par une petite minorité de candidats (un quart) et seules les meilleures copies calculent la valeur de la somme de la série.
8. (a) Près d'un tiers des candidats justifie l'une des inclusions et 20% des candidats justifient l'égalité.  
(b) La question est très peu abordée et elle n'est réussie que par quelques dizaines de candidats.

## PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$ .

Cette partie n'est abordée que par une faible minorité des candidats (moins de 25 %) sauf la première question qui est abordée par la moitié des candidats.

1. Si quasiment tous les candidats abordant cette question (45 %) répondent à la première partie de la question, seuls les meilleurs candidats parviennent à conclure.

2. Seules les meilleures copies (entre 5 et 10%) répondent aux questions 2.a et 2.b.  
Une minorité d'entre eux justifie la réponse à la question 2.c.
3. Une dizaine de candidats parvient à traiter cette question.