

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Un distributeur de café est installé dans le hall d'un lycée.

Partie A

Durant la période de réglage de l'appareil, la tasse déborde une fois sur quatre. Le technicien fait dix essais indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de fois où la tasse déborde parmi ces dix essais.

- I-A-1-** X suit une loi binomiale de paramètres n et p . Donner les valeurs de n et p .
- I-A-2-** Exprimer, en fonction de p , la probabilité P_1 que la tasse ne déborde jamais sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_1 à 10^{-4} près.
- I-A-3-** Exprimer, en fonction de p , la probabilité P_2 que la tasse ne déborde qu'une fois sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_2 à 10^{-4} près.
- I-A-4-** Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_3 que la tasse déborde au moins deux fois sur les dix essais.

Partie B

Le distributeur de café est maintenant réglé. On appelle "durée de fonctionnement sans panne" du distributeur, le temps qui s'écoule avant qu'une première tasse ne déborde. La variable aléatoire T , représentant cette durée, exprimée en jours, suit une loi exponentielle de paramètre λ . Soit a un réel positif non nul. La probabilité $\mathbb{P}(T \leq a)$ que la durée de fonctionnement sans panne soit inférieure ou égale à a jours est alors donnée par :

$$\mathbb{P}(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

- I-B-1-** Justifier que : $\mathbb{P}(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$.
- I-B-2-** Dans cette question, on suppose que $\lambda = 0,02$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité $\mathbb{P}(T > 90)$ que le distributeur fonctionne sans panne plus de 90 jours.
- I-B-3-** Quelle devrait être la valeur de λ pour que la probabilité que le distributeur fonctionne sans panne plus de 120 jours soit de 0,4 ? Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de λ . Justifier les calculs.

Partie C

Le distributeur de café étant réglé, le volume de café dans une tasse en centilitres peut être modélisé par une variable aléatoire V suivant une loi normale d'espérance 6 et d'écart type 0,8.

- I-C-1-** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \frac{V - 6}{0,8}$? On précisera les paramètres de cette loi.
- I-C-2-** Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité P_4 que le volume de café dans une tasse soit compris entre 5,2 et 6,8 centilitres.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-	$n = 10$	$p = \frac{1}{4} = 0,25$
I-A-2-	$P_1 = \mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^{10}$	$P_1 \simeq 0,0563$
I-A-3-	$P_2 = \mathbb{P}(X = 1) = 10 p (1 - p)^9$	$P_2 \simeq 0,1877$
I-A-4-	$P_3 = \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \simeq 0,7560$	
I-B-1-	$\mathbb{P}(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^0 = 1 - e^{-\lambda a}$	
I-B-2-	$\mathbb{P}(T > 90) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 90) = e^{-0,02 \times 90} = e^{-1,8}$ $\mathbb{P}(T > 90) \simeq 0,1653$	
I-B-3-	$\lambda = -\frac{\ln 0,4}{120}$ $\lambda \simeq 0,0076$ car On cherche λ tel que : $\mathbb{P}(T > 120) = 0,4$. Or $\mathbb{P}(T > 120) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 120) = 1 - (1 - e^{-120\lambda}) = e^{-120\lambda}$. D'où $\mathbb{P}(T > 120) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-120\lambda} = 0,4$ $\Leftrightarrow -120\lambda = \ln 0,4$ $\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,4}{120}$.	
I-C-1-	Loi suivie par Z et paramètres de cette loi : Z suit une loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et d'écart-type égal à 1).	
I-C-2-	$P_4 = \mathbb{P}(5,2 \leq X \leq 6,8) = \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1) \simeq 0,68$	

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0; 1], \quad f(x) = \frac{2x + 5}{x + 1}.$$

Partie A

II-A-1- Donner les réels a et b tels que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) = a + \frac{b}{x + 1}$.

II-A-2- Soit L l'intégrale définie par : $L = \int_0^1 f(x) dx$.

Calculer la valeur exacte de L en justifiant les calculs.

Partie B

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad u_n = \int_0^1 f(x) e^{\frac{x}{n}} dx.$$

II-B-1- Soit $n \geq 1$ fixé. Justifier que, pour tout réel $x \in [0; 1]$, $1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$.

II-B-2-a- Justifier alors que, pour tout entier $n \geq 1$, $L \leq u_n \leq L e^{\frac{1}{n}}$.

II-B-2-b- En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et donner sa limite. Justifier la réponse.

II-B-2-c- Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n - L \leq L(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

Partie C

On considère l'algorithme suivant :

Variables

p est un entier

n est un entier

L est un réel

Début de l'Algorithme

L prend la valeur $2 + 3 \ln 2$

n prend la valeur 1

Entrer la valeur de p

Tant que $L(e^{\frac{1}{n}} - 1) > 10^{-p}$ faire

n prend la valeur $n + 1$

Fin de "Tant que"

Afficher n

Fin de l'algorithme.

Lors de l'exécution de cet algorithme, la valeur entrée pour la variable p est 5. A la fin de l'exécution, la valeur affichée de la variable n est notée N .

II-C-1- Que représente N ?

II-C-2- Donner un réel β tel que : $|u_N - 2 - 3 \ln 2| \leq \beta$.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-	$a = 2$	$b = 3$
II-A-2-	$L = 2 + 3 \ln 2$	car
	$\int_0^1 \left(2 + \frac{3}{x+1} \right) dx = [2x + 3 \ln x+1]_0^1 = 2 + 3 \ln 2 - 3 \ln 1$ et $\ln 1 = 0$.	
II-B-1-	$1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$	car pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $0 \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$. La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit que : $e^0 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$ et $e^0 = 1$
II-B-2-a-	$L \leq u_n \leq L e^{\frac{1}{n}}$	car f étant à valeurs positives sur $[0; 1]$, on déduit de la question II-B-1-, que : pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq f(x) e^{\frac{x}{n}} \leq f(x) e^{\frac{1}{n}}$. On a donc : $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f(x) e^{\frac{x}{n}} dx \leq \int_0^1 f(x) e^{\frac{1}{n}} dx$ Or $\int_0^1 f(x) dx = L$ et $\int_0^1 f(x) e^{\frac{1}{n}} dx = e^{\frac{1}{n}} \int_0^1 f(x) dx = L e^{\frac{1}{n}}$
II-B-2-b-	$(u_n)_{n \geq 1}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$	car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} L = L$. En appliquant le théorème des gendarmes à l'encadrement de la question II-B-2-a-, on obtient le résultat demandé.
II-B-2-c-	$0 \leq u_n - L \leq L(e^{\frac{1}{n}} - 1)$	car en retranchant L à chaque membre de l'encadrement de la question II-B-2-a-, on obtient : $0 = L - L \leq u_n - L \leq L e^{\frac{1}{n}} - L$
II-C-1-	N représente le plus petit entier tel que : $L(e^{\frac{1}{n}} - 1) \leq 10^{-5}$	
II-C-2-	$\beta = 10^{-5}$ (ou tout réel supérieur à 10^{-5})	

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé, direct.

On considère la fonction polynomiale P définie par :

$$\text{pour tout complexe } z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13.$$

III-1-a- Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.

III-1-b- Pour tout complexe z , on a l'égalité : $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$

$$\text{où } Q(z) \text{ s'écrit sous la forme : } Q(z) = z^2 + cz + d.$$

Donner les valeurs des réels c et d .

III-1-c- Déterminer l'ensemble \mathcal{S}_1 des solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation $Q(z) = 0$. Justifier le résultat.

III-1-d- En déduire l'ensemble \mathcal{S}_2 des solutions, dans \mathbb{C} , de l'équation $P(z) = 0$.

III-2- Placer sur la figure les points A , C et Ω d'affixes respectives :

$$z_A = i, \quad z_C = 3 + 2i, \quad z_\Omega = 2.$$

III-3-a- On note Z_1 , Z_2 et Z_3 les affixes respectives des vecteurs \overrightarrow{AC} , $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$.

Donner les valeurs de Z_1 , Z_2 et Z_3 .

III-3-b- Donner alors les modules $|Z_1|$, $|Z_2|$, $|Z_3|$ de Z_1 , Z_2 , Z_3 .

III-3-c- Déterminer alors les valeurs exactes des distances AC , ΩA et ΩC . Justifier les réponses.

III-3-d- Déterminer une mesure, en radians, de l'angle géométrique $\widehat{A\Omega C}$. Justifier le résultat.

III-3-e- Quelle est la nature précise du triangle $A\Omega C$?

III-4- On considère les points B et D d'affixes respectives : $z_B = \overline{z_A}$ et $z_D = \overline{z_C}$

où $\overline{z_A}$ et $\overline{z_C}$ désignent respectivement les complexes conjugués de z_A et z_C .

III-4-a- Placer les points B et D sur la figure de III-2-.

III-4-b- Justifier que les points A , B , C et D sont sur un même cercle. Préciser son centre I et son rayon r .

III-4-c- Tracer ce cercle sur la figure de III-2-.

III-5- Donner l'aire \mathcal{A} , en unités d'aires, du trapèze $ABDC$.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-a-	$P(i) = 0$	$P(-i) = 0$	
III-1-b-	$c = -6$	$d = 13$	
III-1-c-	$\mathcal{S}_1 = \{3 - 2i; 3 + 2i\}$ car $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = -16$ Les solutions sont $z_1 = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$ et $z_2 = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i$		
III-1-d-	$\mathcal{S}_2 = \{-i; i; 3 - 2i; 3 + 2i\}$		
III-2-			
III-3-a-	$Z_1 = z_C - z_A = 3 + i$	$Z_2 = z_A - z_\Omega = -2 + i$	$Z_3 = z_C - z_\Omega = 1 + 2i$
III-3-b-	$ Z_1 = \sqrt{10}$	$ Z_2 = \sqrt{5}$	$ Z_3 = \sqrt{5}$
III-3-c-	$AC = \sqrt{10}$ $\Omega A = \sqrt{5}$ $\Omega C = \sqrt{5}$ car $AC = z_C - z_A = Z_1 = \sqrt{10}$, $\Omega A = z_A - z_\Omega = Z_2 = \sqrt{5}$ et $\Omega C = z_C - z_\Omega = Z_3 = \sqrt{5}$		
III-3-d-	$\widehat{A\Omega C} = \frac{\pi}{2}$ car $AC^2 = 10 = 5 + 5 = \Omega A^2 + \Omega C^2$. En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle $A\Omega C$ est rectangle en Ω .		
III-3-e-	Le triangle $A\Omega C$ est rectangle et isocèle en Ω .		
III-4-a-	Utiliser la figure de III-2-		
III-4-b-	$I = \Omega$ $r = \sqrt{5}$ car par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on a : $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega C = \Omega D$. D'autre part : $\Omega A = \Omega C = \sqrt{5}$. Finalement : $\Omega A = \Omega C = \Omega B = \Omega D$.		
III-4-c-	Utiliser la figure de III-2-		
III-5-	$\mathcal{A} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2} = \frac{(2 + 4) \times 3}{2} = 9 \text{ u.a}$		

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points E et F de coordonnées :

$$E(2, 2, 0) \quad \text{et} \quad F(0, 2, 4)$$

et la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\Delta : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = 4 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- IV-1-a-** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur \vec{u} de la droite Δ .
- IV-1-b-** Justifier que le point E n'appartient pas à Δ .
- IV-1-c-** Justifier que le point F appartient à Δ .
- IV-1-d-** En déduire la position relative des droites (EF) et Δ .
- IV-2-** On considère le plan \mathcal{P} contenant les deux droites (EF) et Δ .
Soit le vecteur $\vec{n}(2, 2, 1)$.
- IV-2-a-** Donner les produits scalaires $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF}$ et $\vec{n} \cdot \vec{u}$.
- IV-2-b-** Que peut-on en déduire pour le vecteur \vec{n} par rapport au plan \mathcal{P} ?
- IV-2-c-** Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P} . Justifier la réponse.
- IV-3-** On note H le projeté orthogonal du point E sur la droite Δ .
- IV-3-a-** Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EH} \cdot \vec{u}$.
- IV-3-b-** Justifier alors que les coordonnées (x_H, y_H, z_H) de H vérifient : $x_H - y_H = 0$.
- IV-3-c-** Donner alors les coordonnées de H .
- IV-4-** On note G le point de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{FG} = 2\vec{n}$.
- IV-4-a-** Donner les coordonnées de G .
- IV-4-b-** Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par G .
- IV-4-c-** Que dire précisément sur la position relative des deux droites Δ' et (EH) ?

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$\vec{u} \quad (1; -1; 0)$
IV-1-b-	E n'appartient pas à Δ car $z_E = 0 \neq 4$
IV-1-c-	$F \in \Delta$ car pour $t = -3$ on a : $x_F = -3 + 3 = 0$, $y_F = 3 - 1 = 2$ et $z_F = 4$.
IV-1-d-	(EF) et Δ sont sécantes en F .
IV-2-a-	$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = -4 + 0 + 4 = 0$ $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 2 + 0 = 0$
IV-2-b-	\vec{n} est un vecteur normal à \mathcal{P} .
IV-2-c-	Equation de \mathcal{P} : $2x + 2y + z - 8 = 0$ car, \vec{n} étant normal à \mathcal{P} , le plan \mathcal{P} a une équation de la forme : $2x + 2y + z + \delta = 0$. Comme $E \in \mathcal{P}$, alors $2x_E + 2y_E + z_E + \delta = 0$ donc $\delta = -2x_E - 2y_E - z_E = -2 \times 2 - 2 \times 2 - 0 = -8$
IV-3-a-	$\overrightarrow{EH} \cdot \vec{u} = 0$
IV-3-b-	$x_H - y_H = 0$ car $\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} x_H - 2 \\ y_H - 2 \\ z_H - 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EH} \cdot \vec{u} = (x_H - 2) - (y_H - 2) + 0 = x_H - y_H$ et d'après la question IV-3-a-, on a donc : $x_H - y_H = 0$.
IV-3-c-	$x_H = 1$ $y_H = 1$ $z_H = 4$
IV-4-a-	$G \quad (4; 6; 6)$
IV-4-b-	$\Delta' \begin{cases} x = t + 4 \\ y = -t + 6 \\ z = 6 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$
IV-4-c-	Les droites Δ' et (EH) sont non coplanaires et orthogonales.

STAGES PRÉPA CONCOURS GEIPI POLYTECH

LA MEILLEURE PRÉPA GEIPI POLYTECH

- Préparations complètes, adaptées aux dernières évolutions
- Toujours bienveillant et à l'écoute
- Locaux conviviaux, à taille humaine
- Une équipe pédagogique de haut niveau



 [Préparation concours Geipi
Polytech](#)

STAGES PRÉPA CONCOURS GEIPI POLYTECH EN LIGNE

- Des petits effectifs pour un meilleur suivi
- 10 ans d'expérience dans la préparation des concours
- Préparationnaires soudés et motivés



 [Stage en ligne prépa
concours Geipi Polytech](#)