Mathématiques – QCM (40 points)
Correction

Première partie – Calculs

Exercice I

I-A- $\frac{(2\sqrt{3})^2\times 12^3\times 3^2}{3^{-4}\times(\sqrt{2})^4} = 3^{10}\times 2^8.$

Faux.

$$\frac{(2\sqrt{3})^2\times 12^3\times 3^2}{3^{-4}\times(\sqrt{2})^4} = \frac{4\times 3\times(4\times 3)^3\times 3^2}{3^{-4}\times 2^2} = \frac{2^2\times 3\times(2^2\times 3)^3\times 3^2}{3^{-4}\times 2^2} = \frac{2^2\times 3\times 2^6\times 3^3\times 3^2}{3^{-4}\times 2^2} = 3^{1+3+2+4}\times 2^{2+6-2}$$
$$= 3^{10}\times 2^6 .$$

I-B- $2\sqrt{27} - (2\sqrt{3}-1)^2 = 10\sqrt{3} - 13.$

Vrai.

$$2\sqrt{27} - (2\sqrt{3}-1)^2 = 2\sqrt{9\times 3} - (4\times 3 - 2\times 2\sqrt{3}\times 1 + 1)$$
$$= 2\times 3\sqrt{3} - (13 - 4\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} - 13 .$$

I-C- $ln\left(\frac{e}{4}\right) + ln\left(\frac{1}{9e}\right) + ln(36e) = 1.$

Vrai.

$$ln\left(\frac{e}{4}\right) + ln\left(\frac{1}{9e}\right) + ln(36e) = ln(e) - ln(4) - ln(9e) + ln(36) + ln(e)$$
$$= 1 - 2ln(2) - ln(9) - ln(e) + 2ln(6) + 1$$
$$= 2 - 2ln(2) - 2ln(3) - 1 + 2ln(2) + 2ln(3) = 1 .$$

I-D- $e^{2ln3+ln5} + e^{-2ln5} = 20.$

Faux.

$$e^{2ln3+ln5} + e^{-2ln5} = e^{2ln3}\times e^{ln5} + e^{ln5^{-2}} = 3^2\times 5 + 5^{-2} = 45 + \frac{1}{25} \neq 20 .$$

I-E- Pour tout nombre réel x différent de -2 et de 2, $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$.

Vrai.

$$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{1(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2x-4-x-2+8}{x^2-4} = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} .$$

I-F- Pour tout nombre réel x, $\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1} = e^x + 1.$

Vrai.

$$\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)^2}{e^x+1} = e^x + 1 .$$

Deuxième partie – Fonctions

Exercice II

II-A- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ admet pour dérivée $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Faux.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} .$$

II-B- La fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Vrai.

$$F'(x) = \sqrt{x} + x\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2} .$$

II-C- La fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (ln(3x))^2$ admet pour dérivée la fonction $f'(x) = \frac{2}{3x}ln(3x)$.

Faux.

$$f'(x) = 2\times\frac{3}{3x}\times ln(3x) = \frac{2}{x}ln(3x).$$

II-D- $\lim\limits_{x \to 0}(x\,ln(x) - x) = -\infty$.

Faux.

$\lim\limits_{x \to 0}(x\,ln(x)) = 0$ **(limite de référence) donc** $\lim\limits_{x \to 0}(x\,ln(x) - x) = 0$.

II-E- $\lim\limits_{x \to +\infty}(xe^x - ln(x)) = 0$.

Faux.

$\lim\limits_{x \to +\infty}(xe^x - ln(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x(e^x - \frac{\ln(x)}{x})\right)$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ **(limite de référence)**

donc $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(e^x - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x(e^x - \frac{\ln(x)}{x})\right) = +\infty$ **(par produit).**

Exercice III

Soient f la fonction définie pour tout nombre réel x différent de 1 par $f(x) = \frac{3}{1-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

III-A- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Faux.

$\lim\limits_{x \to 1^-}(1 - x) = 0^+$ **donc** $\lim\limits_{x \to 1^-}(\frac{1}{1-x}) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

III-B- Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = -1$ est $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

Faux.

$f(-1) = \frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$ **donc** $f'(-1) = \frac{3}{4}$.

Donc une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = -1$ est $y = \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{2}$ **soit** $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

III-C- f est concave sur $]1\,;\,+\infty[$.

Vrai.

$f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$ **donc** $f''(x) = \frac{6}{(1-x)^3}$.

Sur $]1\,;\,+\infty[$, $f''(x) < 0$ **donc** f **est concave sur** $]1\,;\,+\infty[$.

Troisième partie – Suites numériques

Exercice IV

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel n, on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

IV-A- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1.

Vrai.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors pour tout entier naturel n,

$u_n \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{u_n} \leq 1$ **et** $\frac{2}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2}{u_n} \geq -1$**, ce qui traduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -1.**

IV-B- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Faux.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + 1$ est croissante, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{-2}{n+1}$ est aussi croissante.

IV-C- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Faux.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n par $v_n = -2(n+1)$ tend vers $-\infty$, ce qui signifie qu'elle diverge.

Quatrième partie – Probabilités

Exercice V

On lance cinq fois un dé à six faces. Cocher VRAI si la variable aléatoire proposée suit une loi binomiale et FAUX dans le cas contraire.

V-A- La variable aléatoire correspondant au nombre de lancers où apparait un numéro pair.

Vrai.

V-B- La variable aléatoire correspondant à la somme des résultats de tous les lancers.

Faux.

Exercice VI

Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire E et P désigne une probabilité sur Ω.
A et B sont deux événements de probabilités respectives 0,6 et 0,4. On suppose de plus que $P(A \cup B) = 0{,}8$.

VI-A- $P(A \cap B) = 0{,}24$.

Faux.

$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,8 = 0,2.}$

VI-B- A et B sont des événements contraires.

Faux.

Si A et B sont des événements contraires, alors ils sont incompatibles et $P(A \cup B) = 1$, ce qui n'est pas le cas.

VI-C- A et B sont des événements indépendants.

Faux.

A et B sont des événements indépendants si, et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui n'est pas le cas.

VI-D- A et B sont des événements incompatibles.

Faux.

Si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cap B) = 0$, ce qui n'est pas le cas.

Cinquième partie – Géométrie dans le plan

Exercice VII

On considère les points A et B de coordonnées respectives dans un repère orthonormé :
$A(2\,;0)$ et $B(0\,;-4)$.

VII -A- Une équation de la droite (AB) est $2x - y - 4 = 0$.

Vrai.

$\boldsymbol{2x_A - y_A - 4 = 2 \times 2 - 0 - 4 = 0}$ **et** $\boldsymbol{2x_B - y_B - 4 = 2 \times 0 + 4 - 4 = 0.}$

L'équation est vérifiée par deux points distincts de la droite (AB) donc l'équation $2x - y - 4 = 0$ est bien une équation de la droite (AB).

VII -B- Une équation de la médiatrice du segment $[AB]$ est $x + 2y + 3 = 0$.

Vrai.

La médiatrice Δ du segment $[AB]$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ et passe par le milieu $I(1\ ;\ -2)$ du segment $[AB]$.

Soit $M(x\ ;y)$ un point du plan.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2x-4y-6=0 \Leftrightarrow x+2y+3=0.$

VII -C- Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $x^2+y^2-2x-4y=0$.

Faux

Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu $I(1\ ;\ -2)$ du segment $[AB]$ et pour rayon $R = IA = \sqrt{(2-1)^2+(0+2)^2} = \sqrt{5}$.

Ainsi, l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4 = 5$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y = 0.$$

VII -D- Le point de coordonnées $(-1\ ;\ -1)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Vrai

$(-1)^2+(-1)^2-2\times(-1)+4\times(-1) = 0$ donc les coordonnées du point vérifient l'équation du cercle.

VII -E- La droite d'équation $2x-y+1=0$ est tangente au cercle de diamètre $[AB]$.

Vrai

$2\times(-1)-(-1)+1=0$ donc le point P de coordonnées $(-1\ ;\ -1)$ est un point d'intersection de cette droite et du cercle.

De plus, le vecteur $\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite.

La droite est donc perpendiculaire au rayon du cercle au point d'intersection, ce qui caractérise bien une tangente au cercle.

REPONSES A L'EXERCICE I de Mathématiques Spécialité

I-1-a- $u_1 = \frac{4}{3}$ $\quad u_2 = \frac{9}{8}$

I-1-b- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 1.

I-2-a- $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$. En effet : Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \frac{3u_n+2-u_n(u_n+4)}{u_n+4} = \frac{-{u_n}^2-u_n+2}{u_n+4}.$$

Or $(1-u_n)(u_n+2) = u_n + 2 - {u_n}^2 - 2u_n = -{u_n}^2 - u_n + 2$.

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

I-2-b- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En effet : Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

Donc $1 - u_n \leq 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$.

Ainsi, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

I-3- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En effet : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1.

I-4- $l = 1$. En effet : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.

Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$ donc $l \geq 1$.

Donc $l + 4 \neq 0$,

et $u_{n+1} = f(u_n) \Leftrightarrow l = \frac{3l+2}{l+4} \Leftrightarrow l^2 + 4l = 3l + 2 \Leftrightarrow l^2 + l - 2 = 0 \Leftrightarrow l = 1$ ou $l = -2$.

Or $l \geq 1$, donc $l = -2$ est impossible.

I-5- $v_0 = \frac{1}{4}$

I-6-a- $v_{n+1} = k \times v_n$ avec $k = \frac{2}{5}$. En effet : Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \frac{\frac{3u_n+2-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2(u_n+4)}{u_n+4}} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2}{5} v_n .$$

On peut en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique (de raison $k = \frac{2}{5}$).

I-6-b- $v_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

I-6-c- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

En effet : $0 < \frac{2}{5} < 1$ (donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$).

I-7-a- $u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n}$

I-7-b La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - v_n = 1$.

REPONSES A L'EXERCICE II de Mathématiques Spécialité

II-1- Solution générale de (E_1) :

$z(t) = \frac{1}{K} + Ce^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

II-2-

t	0	$+\infty$
Variations de f	$\frac{10}{1+a}$ ↗	10

II-3- $f(t) = 5$ pour $t \in \{ln(a)\}$.

En effet : $f(t) = 5 \Leftrightarrow \frac{10}{1+ae^{-t}} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{1+ae^{-t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = 1 + ae^{-t} \Leftrightarrow 1 = ae^{-t} \Leftrightarrow e^t = a$
$\Leftrightarrow t = ln(a)$.

II-4-a- Si $z(t) = \frac{1}{y(t)}$ alors $z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$.

II-4-b- z solution de (E_1) $\Leftrightarrow$ $z'(t) + z(t) = \frac{1}{K}$ pour tout réel t positif **(Ligne 1)**

$\Leftrightarrow$ $-\frac{y'(t)}{(y(t))^2} + \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{K}$ pour tout réel t positif **(Ligne 2)**

$\Leftrightarrow$ $y'(t) = y(t) - \frac{(y(t))^2}{K}$ pour tout réel t positif **(Ligne 3)**

$\Leftrightarrow$ $y'(t) = y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$ pour tout réel t positif $\Leftrightarrow$ y solution de (E_2).

II-5-a- $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{K}+Ce^{-t}} = \frac{K}{1+CKe^{-t}}$ où $C \in \mathbb{R}$.

II-5-b- $a = \frac{K}{y_0} - 1$

II-6- $a > 0$. En effet : $0 < y_0 < K$ donc $\frac{K}{y_0} > 1$ et $\frac{K}{y_0} - 1 > 0$.

II-7-a- $y(5) = 5$ pour $a = e^5$.

II-7-b- La valeur exacte de y_0 est $y_0 = \frac{10}{e^5+1}$.

En effet : $a = \frac{10}{y_0} - 1$.

Donc $a = e^5 \Leftrightarrow \frac{10}{y_0} - 1 = e^5 \Leftrightarrow \frac{y_0}{10} = \frac{1}{e^5+1} \Leftrightarrow y_0 = \frac{10}{e^5+1}$.

II-7-c- Il faudra réintroduire 67 marmottes.