Mathématiques – QCM (40 points)

Pour chaque **Exercice**, *plusieurs affirmations sont proposées. Pour chaque affirmation, vous direz si elle est vraie ou fausse en cochant la réponse choisie sur la feuille de réponses.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse sera pénalisée par des points négatifs.
Pour chaque exercice, le total des points obtenu ne peut être strictement négatif.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.
Les exercices sont tous indépendants.

Première partie – Calculs

Exercice I

I-A- $\dfrac{(\sqrt{8})^2\times(\sqrt{3})^5}{6^3\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2})^{-5}} = \dfrac{4}{3}$.

Vrai.

$$\frac{(\sqrt{8})^2\times(\sqrt{3})^5}{6^3\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2})^{-5}} = \frac{8\times3\times3\times\sqrt{3}\times(\sqrt{2})^5}{2^3\times3^3\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^4}{3} = \frac{4}{3}.$$

I-B- $\dfrac{8^{10}-4^{10}}{10^{10}-8^{10}} = 2^{10}$.

Faux.

$$\frac{8^{10}-4^{10}}{10^{10}-8^{10}} \leq \frac{8^{10}}{10^{10}-8^{10}} \leq \frac{1}{\left(\frac{10}{8}\right)^{10}-1} \leq \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^{10}-1} \leq \frac{1}{\frac{5}{4}-1} \leq \frac{1}{\frac{1}{4}} \leq 4. \text{ Or } 4 < 2^{10}.$$

I-C- $2+\dfrac{4}{1-\dfrac{3}{2-\frac{5}{3}}} = \dfrac{3}{2}$.

Vrai.

$$2+\frac{4}{1-\frac{3}{2-\frac{5}{3}}} = 2+\frac{4}{1-\frac{3}{\frac{1}{3}}} = 2+\frac{4}{1-9} = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

I-D- Pour tout entier naturel n et tout réel a non nul, $\dfrac{(a^n)^2}{\frac{a^n+a^n}{2}} = a^n$.

Vrai.

$$\frac{(a^n)^2}{\frac{a^n+a^n}{2}} = \frac{(a^n)^2}{\frac{2a^n}{2}} = \frac{(a^n)^2}{a^n} = a^n.$$

I-E- Pour tout réel a supérieur ou égal à 1, $\left(\sqrt{a-\sqrt{a}}+\sqrt{a+\sqrt{a}}\right)^2 = 2a$.

Faux.

$$\left(\sqrt{a-\sqrt{a}}+\sqrt{a+\sqrt{a}}\right)^2 = a-\sqrt{a}+a+\sqrt{a}+2\times\sqrt{a-\sqrt{a}}\times\sqrt{a+\sqrt{a}} = 2a+2\sqrt{a^2-a}.$$

Or, pour $a \neq 1$, cette quantité est différente de $2a$.

I-F- $\ln(10^5)-\ln(10^3)-\ln(0{,}01) = 2\ln(100)$.

Vrai.

$$\ln(10^5)-\ln(10^3)-\ln(0{,}01) = 5\ln(10)-3\ln(10)-(-2)\ln(10)$$
$$= 4\ln(10) = 2\ln(100).$$

Exercice II

II-A- Soit m un nombre réel.
L'équation $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$, d'inconnue x, n'admet pas de solution réelle si et seulement si $m \in]-3\,;1[$.
Vrai.

Le discriminant du polynôme du second degré $x^2 + (m+1)x + 1$ vaut
$\Delta = (m+1)^2 - 4 = m^2 + 2m - 3 = (m+3)(m-1)$.
L'équation $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$, d'inconnue x, n'admet pas de solution réelle si et seulement si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si et seulement si $m \in]-3\,;1[$.

II-B- Soit m un nombre réel strictement inférieur à 2.
L'ensemble S des solutions réelles de l'inéquation $\frac{x-m}{m-2} > 3$, d'inconnue x, est $S =]4m-6\,;\,+\infty[$.
Faux.

$\frac{x-m}{m-2} > 3 \iff x - m < 3(m-2)$ car $m-2$ est strictement négatif
$\iff x < 4m - 6$.
Donc l'ensemble S des solutions réelles de l'inéquation $\frac{x-m}{m-2} > 3$, d'inconnue x, est $S =]-\infty; 4m-6\,[$.

Exercice III

Soient x et y deux réels non nuls.

III-A- Si $x \leq 2y$, alors $x^2 \leq 2xy$.
Faux.

$x = -1, y = 1$ est un contre-exemple. En effet, si $x = -1$ et $y = 1$, alors $2y = 2$, $x^2 = 1$ et $2xy = -2$. Ainsi $x \leq 2y$ et $x^2 > 2xy$.
Plus généralement, on a :
Si x est négatif alors $x \leq 2y$ implique $x^2 \geq 2xy$.

III-B- Si $x \leq 2y$, alors $2x \leq x + 2y$.
Vrai.

Si $x \leq 2y$, alors $x + x \leq 2y + x$ soit $2x \leq x + 2y$ (addition du même nombre réel à chaque membre de l'inégalité).

III-C- Si $x \leq 2y$, alors $x^2 \leq 4y^2$.
Faux.

$x = -3, y = 1$ est un contre-exemple. En effet, si $x = -3$ et $y = 1$, alors $x^2 = 9$ et $4y^2 = 4$. Ainsi $x \leq 2y$ et $x^2 > 4y^2$.
Plus particulièrement, on a :
Sur $]-\infty; 0]$, la fonction carrée est décroissante donc $x \leq 2y < 0$ implique $x^2 \geq 4y^2$.

Deuxième partie – Fonctions

Exercice IV

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

IV-A- C_f admet une asymptote d'équation $y = 1$.

Vrai.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$ **car** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$**. Donc** C_f **admet une asymptote d'équation** $y = 1$ **au voisinage de** $+\infty$**.**

IV-B- C_f admet une asymptote d'équation $y = -1$.

Vrai.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = -1$ **car** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$**. Donc** C_f **admet une asymptote d'équation** $y = -1$ **au voisinage de** $-\infty$**.**

IV-C- C_f admet une asymptote d'équation $x = 1$.

Faux.

f **est définie et continue sur** $\mathbb{R}$**. Elle admet donc une limite finie en** $x = 1$ **qui vaut** $\frac{e-1}{e+1}$**.**

IV-D- f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Faux.

Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$**. Donc pour tout réel** x, $f'(x) > 0$ **ce qui signifie que** f **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**.**

IV-E- Pour tout réel x, $f(-x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

Vrai.

Pour tout réel x, $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

Troisième partie – Suites numériques

Exercice V

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que $|u_n - 1| \leq \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul, alors

V-A- pour tout entier naturel n non nul, $-1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n}$.

Faux.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **définie pour tout entier naturel** n **non nul, par** $u_n = 1$ **est un contre-exemple. En effet, pour tout entier naturel** n **non nul,** $|u_n - 1| = 0$ **donc** $|u_n - 1| \leq \frac{1}{n}$**. Et pourtant** $1 > -1 + \frac{1}{n}$ **donc l'encadrement n'est pas vérifié.**

V-B- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

Vrai.

Pour tout entier naturel n **non nul,** $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ **donc** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est majorée par 2.**

V-C- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.

Vrai.

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ non nul, $\mathbf{0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}}$ donc $(\boldsymbol{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0.

V-D- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Faux.

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ non nul, $\mathbf{1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Donc par unicité de la limite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger vers 0.

Exercice VI

On dispose des grains de riz sur les 64 cases d'un échiquier : un sur la première case et on double la quantité d'une case à l'autre.

VI-A- Le nombre de grains de riz placés sur la dernière case est 2^{63}.

Vrai.

Le nombre de grains de riz déposé sur chaque case constitue une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$. Le nombre de grains de riz placés sur la dernière case est donc le 64ème terme de cette suite soit $u_{63} = u_0 \times 2^{63} = 1 \times 2^{63}$.

VI-B- Le nombre total de grains de riz placés sur l'échiquier est $2^{64} - 1$.

Vrai.

Le nombre total de grains de riz placés sur l'échiquier est donc la somme S des 64 premiers termes de cette suite géométrique. On a $S = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$.

Quatrième partie – Géométrie dans le plan

Exercice VII

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-3+\sqrt{6}\\ \sqrt{3}+3\sqrt{2}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-3\\ 3\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

VII -A- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 27$.

Vrai.

$$\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = (-3+\sqrt{6}) \times (-3) + (\sqrt{3}+3\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2} = 9 - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 18 = 27.}$$

VII -B- $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{6}$.

Faux.

$$\boldsymbol{\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3+\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9+6-6\sqrt{6}+3+18+6\sqrt{6}} = \sqrt{36} = 6.}$$

VII -C- $\|\vec{v}\| = 27$.

Faux.

$$\boldsymbol{\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9+18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.}$$

Exercice VIII

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C tels que :

$$AB = \sqrt{3} - 1, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \text{ et } \cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

VIII -A- $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Vrai.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ **.**

Donc $AC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times \cos \widehat{BAC}} = \frac{2}{(\sqrt{3}-1) \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$

VIII -B- Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est $30°$.

Faux.

$\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **or** $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$**.**

REPONSES A L'EXERCICE I de Mathématiques Spécialité

I-1-

x	0	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	$+\infty$

I-2- L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. En effet :

La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) < 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique.

I-3-

x	0		α		$+\infty$
Signe de g		-	0	+	

I-4- $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En effet : Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) \times x - \left(x^3 + 1 - \ln(x)\right)}{x^2} = \frac{3x^3 - 1 - x^3 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{2x^3 + \ln(x) - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

I-5- a- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. En effet :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 + 1) = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 + 1 - \ln(x)) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

I-5-b- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. En effet :

Pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

I-6-

x	0		α		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

REPONSES A L'EXERCICE II de Mathématiques Spécialité

II-1- $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,-2\,;\,-2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}(-1\,;\,-2\,;\,1)$

II-2- $AB = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

II-3-a- Les points A, B et C ne sont pas alignés. En effet : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

II-3-b- Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - y - z + 4 = 0$. En effet :

$x_A - y_A - z_A + 4 = 1 - 2 - 3 + 4 = 0$, $x_B - y_B - z_B + 4 = -3 - 1 + 4 = 0$

et $x_C - y_C - z_C + 4 = -4 + 4 = 0$.

Il existe un unique plan passant par les trois points non alignés A, B et C.

II-4-a- $I(-1\,;\,1\,;\,2)$

II-4-b- Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x + y + z - 1 = 0$.

En effet : $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,-2\,;\,-2)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $-4x - 2y - 2z + d = 0$. De plus $I \in \mathcal{P}$, donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan et on a $-4x_I - 2y_I - 2z_I + d = 0 \Leftrightarrow 4 - 2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$.

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $-4x - 2y - 2z + 2 = 0$ soit $2x + y + z - 1 = 0$.

II-5-a-	Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$. En effet : **Les vecteurs normaux de $\mathcal{P}$ et (ABC) ne sont pas colinéaires, donc ces deux plans sont sécants selon une droite.**
II-5-b-	Un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.
II-6-a-	Une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ est : $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$.
II-6-b-	Le point C appartient à $\mathcal{S}$. En effet : $IC^2 = (0+1)^2 + (0-1)^2 + (4-2)^2 = 6$ **donc** $IC = \sqrt{6} = \frac{AB}{2}$.
II-6-c-	Le triangle ABC est rectangle en C. En effet : $\overrightarrow{CA}(1\ ;\ 2\ ;-1)$ **et** $\overrightarrow{CB}(-3\ ;0\ ;-3)$. **On a** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 + 0 + 3 = 0$ **donc les vecteurs** $\overrightarrow{CA}$ **et** $\overrightarrow{CB}$ **sont orthogonaux.**

REPONSES A L'EXERCICE III de Mathématiques Spécialité

III-1-	$P(T) = \frac{1}{4}$ $\quad P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$ $\quad P_T(A_1) = \frac{1}{2}$ $\quad P_{\overline{T}}(A_1) = \frac{1}{6}$.
III-2-	$P(A_1) = \frac{1}{4}$. En effet : **D'après la formule des probabilités totales,** $P(A_1) = P(T \cap A_1) + P(\overline{T} \cap A_1) = P(T) \times P_T(A_1) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(A_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.
III-3-	$P_{A_1}(T) = \frac{1}{2}$. En effet : $P_{A_1}(T) = \frac{P(T \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(T) \times P_T(A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.
III-4-	$P_T(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad P_{\overline{T}}(A_n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$ $\quad P(A_n) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.
III-5-	$a = 3$.
III-6-	$\lim\limits_{n \to +\infty} P_{A_n}(T) = 1$. En effet : $\lim\limits_{n \to +\infty} P_{A_n}(T) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3^n}{3^n + 3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3^n}{3^n\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}} = 1$ **car** $3 > 1$ **donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$.