A 2015 MATH. II PC

ÉCOLES DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

CONCOURS D'ADMISSION 2015

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Résultats admis

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbf{R}, \lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0\}$ et l'on suppose que λ appartient à $\mathcal{C}$. Pour simplifier la rédaction, le candidat pourra utiliser la notation

$$\tilde{\lambda} = \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Les suites de Fibonacci (F_n, $n \in \mathbf{Z}$) et de Lucas (L_n, $n \in \mathbf{Z}$) généralisées sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} &F_0(\lambda) = 0,\ F_1(\lambda) = 1, \\ &F_{n+1}(\lambda) = (1+2\lambda)F_n(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)F_{n-1}(\lambda),\ \text{pour tout } n \geq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &L_0(\lambda) = 2,\ L_1(\lambda) = 1+2\lambda, \\ &L_{n+1}(\lambda) = (1+2\lambda)L_n(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_{n-1}(\lambda),\ \text{pour tout } n \geq 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$F_{-n}(\lambda) = \frac{-F_n(\lambda)}{(\lambda^2+\lambda-1)^n} \quad \text{et} \tag{3}$$

$$L_{-n}(\lambda) = \frac{L_n(\lambda)}{(\lambda^2+\lambda-1)^n}. \tag{4}$$

Elles vérifient les propriétés admises suivantes pour tout entier n :

$$F_{n+1}(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)F_{n-1}(\lambda) = L_n(\lambda), \tag{5}$$

$$L_{n+1}(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_{n-1}(\lambda) = 5F_n(\lambda). \tag{6}$$

a) I représente la matrice identité dans $\mathbf{R}^2$,

b) $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées 2×2 à coefficients réels,

c) $J \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ représente une matrice non multiple de I et vérifiant $J^2 = \dfrac{5}{4}\ \mathrm{I}$,

d) On note $R(\lambda)$ la matrice définie par $R(\lambda) = J + (\lambda + \dfrac{1}{2})\,\mathrm{I}$.

Comme d'habitude, $R(\lambda)^n$ représente la puissance n-ième de la matrice $R(\lambda)$. A tout moment, le candidat peut utiliser la formule admise suivante, dite « formule de Moivre », valable pour tout entier naturel n :

$$R(\lambda)^n = F_n(\lambda)\, J + \frac{1}{2} L_n(\lambda)\, \mathrm{I}\,. \tag{7}$$

L'objectif de ce problème est d'utiliser les propriétés des matrices $R(\lambda)$ pour en déduire des propriétés des suites de Fibonacci et Lucas.

I Préliminaires

1. Calculer $F_2(\lambda)$, $L_2(\lambda)$.

2. Exhiber une infinité de matrices J qui satisfassent c).

3. Montrer que les matrices I et J sont linéairement indépendantes sur $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$.

Dans tout ce qui suit, J désigne une matrice quelconque vérifiant $J^2 = \frac{5}{4}\,\mathrm{I}$.

II Formule de Moivre généralisée

4. Trouver deux polynômes Q et T de $\mathbf{R}[X]$ tels que

$$(X + \lambda + \frac{1}{2})^2 = (X^2 - \frac{5}{4})Q(X) + T(X).$$

5. En déduire que $R(\lambda)$ vérifie l'équation suivante :

$$R(\lambda)^2 = (1 + 2\lambda)R(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)\,\mathrm{I}\,. \tag{8}$$

6. Montrer que $R(\lambda)$ est inversible et montrer que

$$R(\lambda)^{-1} = -\frac{1}{(\lambda^2 + \lambda - 1)}\, J + \frac{1}{2}\frac{1 + 2\lambda}{(\lambda^2 + \lambda - 1)}\, \mathrm{I}\,. \tag{9}$$

7. En utilisant la formule de Moivre, établir que pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} 2F_{n+1}(\lambda) &= L_n(\lambda)F_1(\lambda) + L_1(\lambda)F_n(\lambda) \\ 2L_{n+1}(\lambda) &= 5F_n(\lambda)F_1(\lambda) + L_n(\lambda)L_1(\lambda). \end{aligned} \tag{10}$$

8. Montrer que la formule de Moivre reste valable pour tout entier négatif.

III Quelques identités remarquables

9. Montrer l'identité suivante :

$$R(\lambda)^2 + (1-\lambda-\lambda^2)\,\mathrm{I} = 2\,J\,R(\lambda). \tag{11}$$

10. Soit $W(\lambda) = (\lambda^2+\lambda-1)R(\lambda)^{-2}$. Montrer que

$$I - W(\lambda) = 2JR(\lambda)^{-1} \quad \text{et} \quad (I-W(\lambda))^{-1} = \frac{2}{5}JR(\lambda).$$

11. Montrer alors que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda^2+\lambda-1)^k R(\lambda)^{n-2k} = F_{n+1}(\lambda)\ \mathrm{I}\,.$$

12. En déduire, pour $n \geq 0$, les valeurs de

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda^2+\lambda-1)^k F_{n-2k}(\lambda) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}(\lambda^2+\lambda-1)^k L_{n-2k}(\lambda).$$

Pour $k \geq 1$, on introduit

$$\Delta_k(\lambda) = \det\begin{pmatrix} L_{k-1}(\lambda) & L_k(\lambda) \\ L_k(\lambda) & L_{k+1}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

On définit le polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ par

$$P(X) = (1-\lambda-\lambda^2)\,X^2 + (1+2\lambda)\,X - 1.$$

13. Montrer que $(\Delta_k(\lambda),\, k \geq 1)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

    Indication : on pourra utiliser la linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes.

14. En déduire, pour $k \geq 1$, la valeur de

$$L_k(\lambda)^2\ P\Big(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)}\Big).$$

On pose, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$F_n = F_n(0) \text{ et } L_n = L_n(0).$$

On a aisément les propriétés admises suivantes :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$
$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ et } L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$
$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n,\ L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$$

15. Montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$R\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) = \frac{2}{L_k}\ J\,R(0)^k. \tag{12}$$

16. Déduire des questions précédentes la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbf{Z}$, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) &= \frac{5^n}{{L_k}^{2n}}\ F_{2nk}, \\ L_{2n}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) &= \frac{5^n}{{L_k}^{2n}}\ L_{2nk}. \end{aligned} \tag{13}$$

Une démarche similaire permet de démontrer les identités suivantes que l'on admettra.

$$\begin{aligned} F_{2n+1}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) &= \frac{5^n}{{L_k}^{2n+1}}\ L_{k(2n+1)}, \\ L_{2n+1}\left(\frac{L_{k-1}}{L_k}\right) &= \frac{5^n}{{L_k}^{2n+1}}\ F_{k(2n+1)}. \end{aligned} \tag{14}$$

IV Une touche de probabilités

Soit i un entier impair et $n \geq 0$, on pose

$$p_k = \frac{L_i \; L_{2i(n-k)}}{2 \, L_{i(2n+1)}} \text{ pour } k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}.$$

17. Montrer que la suite $(p_k,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\})$ définit une probabilité.

    Indication : on pourra chercher à exprimer $L_{i(2n+1)}$ en utilisant les questions 12, 13 et les identités (14).

Fin du problème