A 2016 - MATH II PC.

CONCOURS COMMUN MINES PONTS

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

Mathématiques II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

En 1770 Edward Waring, se basant sur des calculs empiriques, pose la conjecture suivante : pour un entier n naturel fixé, on peut exprimer tout entier naturel comme somme d'*au plus* $g(n)$ puissances n-ièmes d'entiers naturels, $g(n)$ ne dépendant que de n. Le cas $n = 2$ avait déjà été formulé par Fermat en 1640, Euler et Lagrange ont traité des cas particuliers et finalement en 1909 Hilbert a pu établir ce résultat (appelé parfois théorème de Hilbert-Waring).
On se propose ici de résoudre un problème analogue dans le cadre (algébrique) des polynômes à coefficients complexes. Plus précisément, on fixe un entier naturel n et on étudie les équations

$$X = f_1^n(X) + ... + f_k^n(X),$$

les inconnues $(f_1, ..., f_k)$ étant dans $\mathbf{C}[X]$. On s'intéresse particulièrement au *plus petit entier* $k = k(n)$ pour lequel cette équation possède des solutions. L'objectif de ce problème est de prouver que $k(2) = 2$ et que pour $n \geq 3$, on a l'inégalité

$$n < k^2(n) - k(n).$$

On considère dorénavant que n **est un entier naturel supérieur ou égal à** 2.

Soient $d_1, \cdots, d_n$ des nombres réels. On note

$$V(d_1, \cdots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & \cdots & d_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

le déterminant de Vandermonde de $(d_1, \cdots, d_n)$. On rappelle que

$$V(d_1, \cdots, d_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (d_j - d_i)$$

Pour tout $d \in \mathbf{R}$ et $k \geq 1$, on note

$$(d)_k = d(d-1) \cdots (d-k+1),$$

et on introduit le déterminant

$$D(d_1, \cdots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (d_1)_1 & (d_2)_1 & \cdots & (d_n)_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (d_1)_{n-1} & (d_2)_{n-1} & \cdots & (d_n)_{n-1} \end{vmatrix}.$$

A Propriétés élémentaires du Wronskien

1. Montrer que $D(d_1, \cdots, d_n) = V(d_1, \cdots, d_n)$.

On fixe à présent un intervalle $\mathrm{I} =]a, b[$ de $\mathbf{R}$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions de I dans $\mathbf{R}$, $(n-1)$ fois dérivables sur I ; leur *Wronskien* $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ est la fonction définie sur I par

$$W_n(f_1, \cdots, f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le Wronskien des fonctions monômiales $(x \mapsto a_1 x^{d_1}), \cdots, (x \mapsto a_n x^{d_n})$ est égal à

$$V(d_1, \cdots, d_n)\ x^{d_1 + \cdots + d_n - \binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

3. Soit g une fonction $(n-1)$ fois dérivable sur I, montrer que

$$W_n(f_1 g, f_2 g, \cdots, f_n g) = g^n\, W_n(f_1, \cdots, f_n).$$

4. Pour f_1 ne s'annulant pas sur I, montrer que

$$W_n(f_1, \cdots, f_n) = f_1^n\ W_{n-1}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \left(\frac{f_3}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right).$$

B Annulation du wronskien

On note $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $(n-1)$ fois dérivables de I dans $\mathbf{R}$.

5. Montrer que si $f_1, \cdots, f_n$ forment une famille liée dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\, \mathbf{R})$ alors $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ est identiquement nulle sur I.

6. Soit f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\, \mathbf{R})$. On suppose que $W_2(f_1, f_2) = 0$ sur I et que $f_1 f_2$ ne s'annule pas sur I. Montrer alors que f_1 et f_2 forment une famille liée de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\, \mathbf{R})$.

7. Donner un exemple de fonctions f_1, f_2 formant une famille libre dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\, \mathbf{R})$ et telles que $W_2(f_1, f_2) = 0$.

8. En utilisant la question 4 montrer que si $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ est la fonction nulle sur I, alors il existe un sous-intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, sur lequel les restrictions de $f_1, \cdots, f_n$ à J forment une famille liée dans $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{J};\, \mathbf{R})$.

On suppose maintenant que $0 \in \mathrm{I}$, que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont développables en séries entières au voisinage de 0, qu'elles coïncident avec leur développement sur I et qu'elles forment **une famille libre** de $\mathcal{C}^{n-1}(\mathrm{I};\, \mathbf{R})$. On définit l'*ordre* d'une série entière non nulle $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ comme le plus petit entier naturel d tel que $a_d \neq 0$.

9. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$(f_1, \ldots, f_n)\mathrm{A} = (g_1, \ldots, g_n),$$

où les $g_1, \ldots, g_n$ sont des fonctions développables en série entière non nulles dont les ordres $d_1, \ldots, d_n$ sont deux à deux distincts. On commencera d'abord par le cas $n = 2$.

On souhaite démontrer que pour ces fonctions $(g_1, \ldots, g_n)$, il existe un réel $C \neq 0$ tel que

$$W_n(g_1, \ldots, g_n)(x) = C\, x^{d_1 + \ldots + d_n - \binom{n}{2}}\, (1 + o(1)) \tag{1}$$

au voisinage de 0.

10. Traiter le cas où pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $d_i \geq n - 1$.

11. On choisit un entier a tel que pour tout $i = 1, \cdots, n$, on ait $d_i + a \geq n - 1$. En utilisant la question 3 avec $g(x) = x^a$, montrer (1).

12. En déduire que $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ est non nulle au voisinage de 0.

C Problème de Waring sur $\mathbf{C}[X]$

Pour n fixé, on se propose d'étudier les équations

$$X = f_1^n(X) + \cdots + f_k^n(X),$$

en les inconnues $f_1(X), \cdots, f_k(X) \in \mathbf{C}[X]$ et plus particulièrement le plus petit entier k pour lequel cette équation possède des solutions. On notera ce plus petit entier $k(n)$. Si f appartient à $\mathbf{C}[X]$, on note

$$\Delta f(X) = f(X+1) - f(X) \text{ et } \Delta^p f = \Delta\Big(\Delta^{p-1} f\Big).$$

Lorsque cela est nécessaire, on identifie polynômes et fonctions polynomiales associées.

13. Montrer que $\Delta^{n-1}(X^n)$ est de la forme $aX + b$ avec $a \neq 0$, et en déduire que l'ensemble des solutions de l'équation est non vide et que $k(n) \leq n$.
On notera en particulier que $k(n)$ est fini.

14. Montrer que tout $g \in \mathbf{C}[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$g(X) = g_1^n(X) + \cdots + g_{k(n)}^n(X).$$

15. Montrer que $k(2) = 2$.

Nous allons maintenant montrer que pour $n \geq 3$, $n < k^2(n) - k(n)$.

Soit $X = f_1^n(X) + \cdots + f_{k(n)}^n(X)$ avec $f_i \in \mathbf{C}[X]$. On considère les Wronskiens

$$Z_1 = W_{k(n)}(f_1^n, \cdots, f_{k(n)}^n) \quad \text{et} \quad Z_2 = W_{k(n)}(X, f_2^n, \cdots, f_{k(n)}^n).$$

16. Montrer que $Z_1 = Z_2$ puis que Z_1 n'est pas le polynôme nul.

17. Montrer que Z_1 est divisible par $\prod_{i=1}^{k(n)} f_i^{n-k(n)+1}$.

18. Montrer que

$$\deg Z_2 \leq 1 + n\Big(\sum_{i=2}^{k(n)} \deg f_i\Big) - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2}.$$

19. Déduire des questions 17 et 18 que

$$n \deg f_1 \leq (k(n)-1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1.$$

20. Montrer que $n < k^2(n) - k(n)$.

Fin du problème