A2017 – MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première répétition

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = e^{nx}\ \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\, e^{-u})^n \,\mathrm{d}u.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\, y^n.$$

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u\, e^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.

6. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx}\ \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u\, e^{-u})^n \,\mathrm{d}u.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1}\, u\, e^{-u}$ *pour* $u \geq x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$*, pour* $x = 1$*, sera obtenue dans la suite du problème.*

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\} \qquad 0 < f(x) < 1$

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

Pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\Big(f(x)\Big).$$

8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Montrer que la fonction φ, sur $]-1,1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait
$$f(x) \leq e^{-ax^2}.$$
Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, et que la suite de fonctions $(g_n,\, n \geq 1)$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction g telle que pour tout $u \in \mathbf{R}$,
$$g(u) = e^{-u^2/2}.$$

11. En déduire que
$$\int_{-1}^{1} \Big(f(x)\Big)^n \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_{0}^{1} \Big(f(x)\Big)^n \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

12. Pour tout entier $n \geq 1$, déduire de la question 5 que
$$n! = n^{n+1}\, e^{-n}\, (I_n + J_n),$$

avec
$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x.$$

13. Montrer que pour tout $x \geq 1,\ x+1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n.

14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.

15. En déduire que
$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

IV Formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie I.

16. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :
$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} \, \mathrm{d}t.$$

17. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que
$$T_n(1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n.$$

V Première répétition

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. *Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, on pose $X = 5$.*

Pour représenter cette expérience, on introduit l'espace $\Omega = \{1, \cdots, n\}^{n+1}$ et les variables aléatoires coordonnées $(U_1, \cdots, U_{n+1})$ définies par
$$\begin{aligned} U_j \,:\, \Omega &\longrightarrow \{1, \cdots, n\} \\ w = (w_1, \cdots, w_{n+1}) &\longmapsto w_j. \end{aligned}$$

En d'autres termes, U_j est le numéro de la boule tirée au j-ième tirage. On suppose que la probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω est telle que les variables aléatoires $(U_j,\ j = 1, \cdots, n+1)$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$.

18. Pour une entrée `liste`$= [w_1, \cdots, w_{n+1}]$, écrire un pseudo-code ou un code Python pour calculer la valeur de $X(w_1, \cdots, w_{n+1})$.

    Si nécessaire, on admettra l'existence d'une fonction qui permet de tester l'appartenance d'un élément w à une liste L : (w in L) renvoie « True » si $w \in L$, « False » sinon.

19. Montrer que pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, l'événement $(X = k)$ est de probabilité non nulle.

20. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que

$$\mathbf{P}(X > k+1) = \mathbf{P}\Big(X > k+1 \;\Big|\; X > k\Big)\,\mathbf{P}(X > k).$$

21. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(X > k) = \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}.$$

22. Etablir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k).$$

23. En utilisant les questions précédentes, donner un équivalent simple de $\mathbf{E}[X]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin du problème