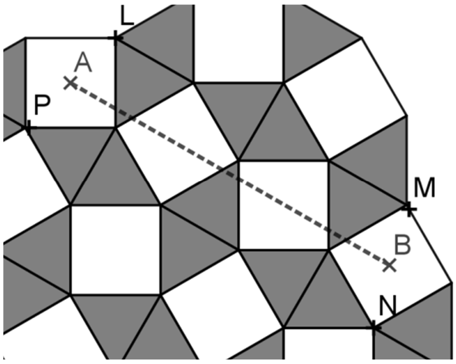
Olympiades académiques de mathématiques

Par équipe session 2019

Éléments de solution

Carrelage



On nomme L et P, M et N des sommets opposés des carrés dont A et B sont les milieux. Les triangles équilatéraux ont des angles mesurant 60° et les « demi-triangles équilatéraux » ont des angles aigus de 30° et 60°. Il s'ensuit que les droites (LM) et (NP) sont parallèles et que le quadrilatère LMNP est un trapèze, isocèle de surcroît, dont [AB] joint les milieux des côtés non parallèles.
La longueur AB est donc la demi-somme des longueurs LM et NP.
On a $\mathrm{LM} = 20 + 2 \times \frac{20\sqrt{3}}{2} + 20 = 40 + 20\sqrt{3}$
$\mathrm{PN} = 2 \times \frac{20\sqrt{3}}{2} + 20 + 2 \times \frac{20\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3} + 20.$

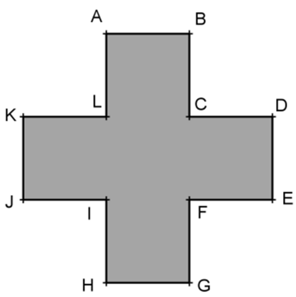
Finalement : $AB = 30 + 30\sqrt{3}$

Onze diviseurs

Si x est une valeur qui convient, alors $-x$ convient aussi, et cinq des onze valeurs cherchées sont positives, cinq autres sont leurs opposés, la dernière est 0. Le nombre a cherché est donc un multiple de 75. On cherche donc cinq entiers positifs x, y, z, t, u tels que :
1. Le plus petit multiple commun des six nombres $75 - x, 75 - y, 75 - z, 75 - t, 75 - u$ et 75 soit le plus petit possible.
2. Ce plus petit multiple commun n'ait pas d'autre diviseur compris entre 1 et 75 que ces six nombres.

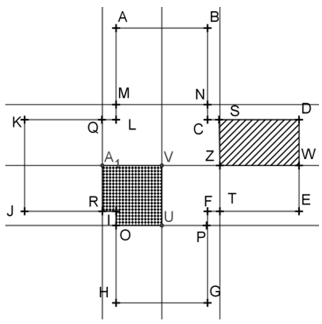
Comme le nombre 75 a exactement six diviseurs qui sont $75, 25, 15, 5, 3$ et 1, les nombres cherchés sont $74, 72, 70, 60$ et 50. Le nombre a est alors 75 lui-même.

Points de croix



1. Il est possible de trouver deux points dont la distance soit supérieure à 1. C'est la cas de A et D. Pour trois points, prendre A, J et D, quatre prendre A, D, G et J, etc. Il y a douze points repérés sur le bord de la croix, et pour chacun d'eux le plus proche voisin est à la distance 1. Donc, jusqu'à douze, les affirmations proposées sont vraies.

2. Plaçons sur les bords de la croix les points M, N, O, P, Q, R, S et T de sorte que $\mathrm{AM} = 0{,}83$, $\mathrm{BN} = 0{,}83$, etc. et traçons les médiatrices des segments [AB] et [DE]. On découpe la croix en douze secteurs dont huit sont des rectangles et quatre des hexagones formés de carrés amputés d'un coin, si on peut dire. La distance maximale, dans un rectangle tel que SDWZ, est réalisée en prenant deux sommets opposés. On trouve, en utilisant le théorème de Pythagore : $0{,}83^2 + 0{,}5^2 = 0{,}9389$. Cette distance maximale est la racine carrée de ce nombre, inférieure à 1. Dans un hexagone tel que A_1VUOIR, la distance maximale est réalisée en prenant deux sommets du carré, A_1 et U. On trouve son carré égal à $2 \times (1{,}5 - 0{,}83)^2 = 08978$, encore une fois inférieur à 1. Chacun des douze premiers points peut être placé dans une pièce différente, mais le treizième sera placé là où il y en a déjà un autre…



Il va de soi que d'autres découpages – en 12 pièces de diamètre *inférieur à 1 – sont possibles.*