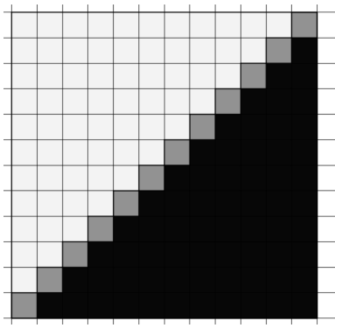
O.P.E. 2020 Éléments de solution

Exercice 1 « Dites 33 ! »

1. Le tableau suivant présente une possibilité.

Le plus grand	10	9	8
Le moyen	6	7	5
Le plus petit	4	2	3

2. Un triplet $(x, y, x+y)$, constitué d'entiers compris entre 1 et 33, utilise soit 3 entiers pairs, soit 1 entier pair et deux entiers impairs (le plus grand est pair s'il est la somme de deux impairs, impair s'il est la somme d'un pair et d'un impair). Tout triplet de cette sorte utilise donc un nombre pair de nombres impairs. Mais, entre 1 et 33, il y a 17 nombres impairs et 16 nombres pairs. Le problème n'a pas de solution.

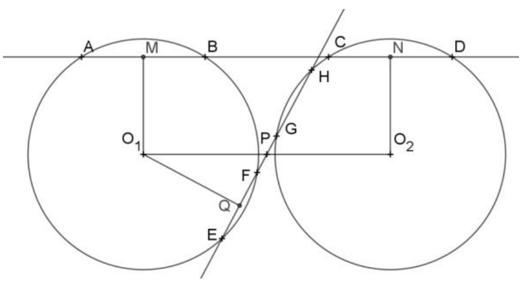


3. *a.* Cette somme, $2+3+4+\cdots+31+32+33+34$, vaut 594. Cela peut se calculer à la main ou à la calculatrice. La figure ci-contre montre qu'un carré de côté $n+1$, d'aire $(n+1)^2$, est décomposé en deux « triangles » identiques et la « diagonale » d'aire $n+1$. L'aire de chacun des deux triangles est donc $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}$. Ici, $n = 34$, donc $1+2+3+4+\cdots+32+33+34$ =595, somme de laquelle déduire 1 pour obtenir la somme cherchée.
b. Chacun des plus grands nombres des triplets étant la somme des deux autres, il constitue la moitié du total. La somme des onze plus grands est donc 297.
c. On vérifie que les onze nombres proposés ont bien pour somme 297.
Une solution est :

Triplet	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9	n°10	n°11
Le plus grand	20	21	22	23	24	27	30	31	32	33	34
Le moyen	17	13	12	16	15	25	19	26	18	29	28
Le plus petit	3	8	10	7	9	2	11	5	14	4	6

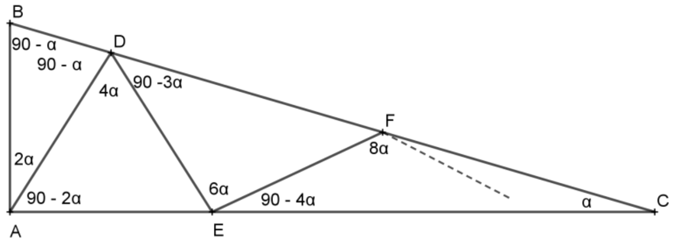
Une indication : il y a a triplets constitués de trois nombres pairs et b constitués de deux nombres impairs et un pair. On a $a+b = 11, 3a+b = 17$et $2b = 16$. Il y a donc trois triplets constitués de nombres pairs et huit mixtes (deux impairs, un pair).

Exercice 2 Le rayon mystérieux



Appelons, comme suggéré, M et N les milieux respectifs de [AB] et [CD]. Le quadrilatère O_1O_2NM est un rectangle, car (O_1M)et (O_2N) sont les médiatrices de [AB] et [CD] respectivement. Il s'ensuit que la distance O_1O_2 est égale à 28.
Dans un cercle, il n'existe que deux cordes de direction donnée et de longueur donnée inférieure au diamètre (ici, le diamètre est inférieur à 28, puisque les cercles sont extérieurs l'un à l'autre). La figure est donc unique à une symétrie près d'axe la ligne des centres.
La sécante (EH) ne peut être parallèle à (AD), car alors la distance FG serait $18-3-3 = 12$. Si on appelle S le milieu de [EH] et de [FG], la symétrie de centre S échange les deux cercles (les points Q et R sont échangés, les perpendiculaires en Q et R à (EH) aussi et les points O_1 et O_2 de ces perpendiculaires aussi). Il s'ensuit que le point S et le point P, milieu de $[O_1O_{2]}$, sont un même point.
On peut conclure en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles O_1QP et O_1QF, rectangles l'un et l'autre en Q. Pour le premier, on obtient $O_1P^2 = O_1Q^2 + 6^2$, pour le second $O_1F^2 = O_1Q^2 + 3^2$
Finalement $O_1F^2 = 14^2 - 6^2 + 3^2 = 169$. Le rayon cherché est donc 13.

Exercice 3 Zigzag

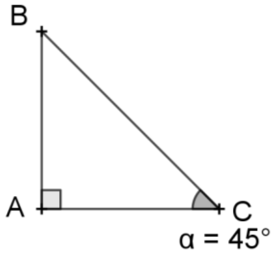
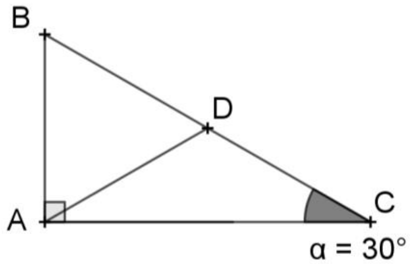
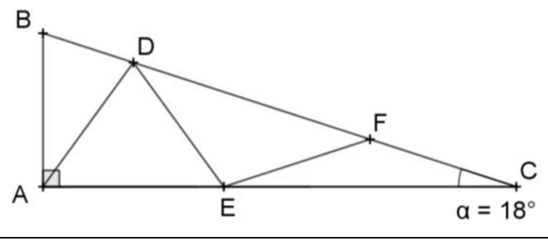
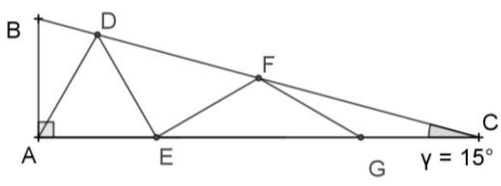
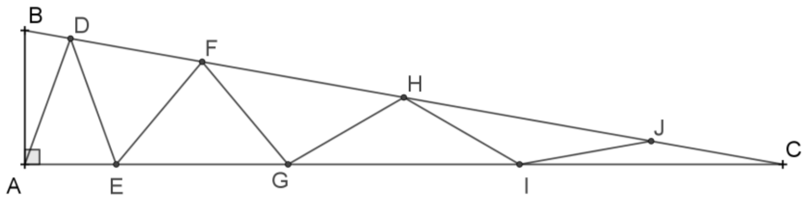


La figure ci-contre montre comment débute le zigzag : le triangle ABD, isocèle de sommet principal A, a des angles à la base dont la mesure en degrés est $90 - \alpha$. Son angle au sommet a donc pour mesure 2α. Les angles à la base du triangle isocèle ADE, de sommet principal D, mesurent $90 - 2\alpha$ et son angle au sommet 4α. Les angles au sommet des triangles isocèles suivants mesurent $6\alpha, 8\alpha,$ etc., $2n\alpha$ pour le $n$ième triangle construit. Si ce triangle est le dernier possible, ses angles à la base mesurent α, et on a donc $2(n+1)\alpha = 180$, ou encore $(n+1)\alpha = 90$.

Il faut donc chercher α parmi les diviseurs de 90 strictement inférieurs à 90. Les possibilités sont :

- $\alpha = 45$; on a alors $n = 1$. Le triangle de départ est rectangle isocèle ; voir figure 1.
- $\alpha = 30$; on a alors $n = 2$. Le premier de ces deux triangles est équilatéral ; voir figure 2.
- $\alpha = 18$; on a alors $n = 4$. Voir figure 3.
- $\alpha = 15$; on a alors $n = 5$. Voir figure 4.
- $\alpha = 10$; on a alors $n = 8$; voir figure 5.
- $\alpha = 9$; on a alors $n = 9$;
- $\alpha = 6$; on a alors $n = 14$;
- $\alpha = 5$; on a alors $n = 17$;
- $\alpha = 3$; on a alors $n = 29$;
- $\alpha = 2$; on a alors $n = 44$;
- $\alpha = 1$; on a alors $n = 89$.

Parmi les figures proposées, seules les cinq suivantes sont solutions. Les autres solutions ne figuraient pas dans les propositions.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Figure 1 : Le triangle de départ est lui-même isocèle</td><td>Figure 2 : Cas particulier de la figure habituelle des deux triangles isocèles de sommet principal le milieu de l'hypoténuse. Ici, le premier est équilatéral.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Figure 3 ; quatre triangles</td><td>Figure 4 : cinq triangles</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$\boldsymbol{\alpha = 10°}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Figure 5 : On peut construire 8 triangles</td></tr>
</table>