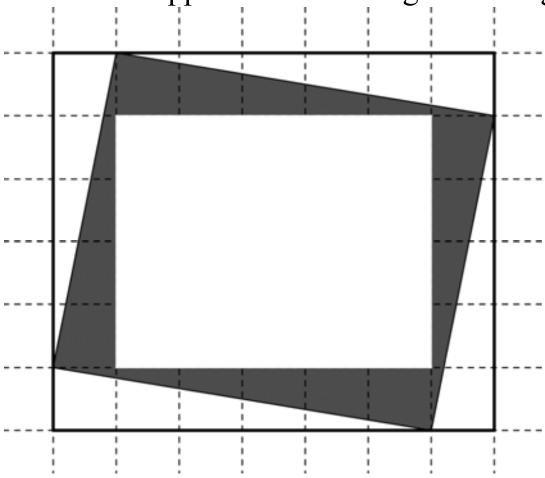
Éléments de solution

Exercice 1 : Noir et Blanc

On observe que les rectangles clairs « complètent » les parallélogrammes noirs de sorte qu'une surface noire et une surface claire consécutives ont la même aire. Par exemple, sur la figure ci-dessous apparaissent 8 triangles rectangles, 4 noirs et 4 blancs de côtés 6 et 1 ou 5 et 1.



Avec une numérotation parlante :

$N_1=3$; $B_1=0$.
$N_2=3+(3+4)=3+7=10$; $B_2=N_1=3$.
$N_3=10+(5+6)=10+11=21$; $B_3=N_2=10$.
$N_4=21+(7+8)=21+15=36$; $B_4=N_3=21$.
$N_5=36+(9+10)=36+19=55$; $B_5=N_4=36$.

ainsi de suite jusqu'à $\mathbf{N_{20}=820}$ et $\mathbf{B_{20}=741}$.

Exercice 2 : Nombres à la chaîne

En effectuant un quadrillage (c'est à dire en construisant le tableau décrit), on observe que les diagonales sont constituées de nombres tous pairs pour l'une, de nombres tous impairs pour l'autre.

De plus le passage C1L1→C2L2 correspond à un ajout de 2.

Puis vient ensuite un ajout de 4 pour C2L2→C3L3 puis de 6 pour C3L3→C4L4, ou encore de 8 pour C4L4→C5L5.

Le nombre qui nous intéresse correspond à la case C25L25.
On s'attend à un nombre impair.
Par itération d'ajouts de 2, 4, 6, 8, 10 … à partir du nombre 1, on arrive à **601**.

Variante : lorsqu'on parvient à un bord, le dernier nombre écrit est un carré. La vingt-cinquième ligne et la vingt-cinquième colonne font figurer les nombres entiers compris entre 24^2+1 et 25^2. On cherche la médiane de cette liste.

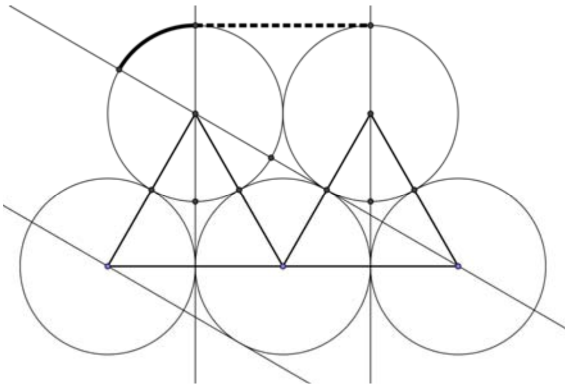
Exercice 3 : Le meilleur emballage

Cas de l'emballage à plat

Le ruban adhésif couvre deux demi-cercles et deux segments de longueur 6 fois le diamètre des tuyaux. Sa longueur est, en cm :

$$\ell = 2\times 6\times 20+20\pi$$
$$\ell = 240+20\pi$$

Cas de l’emballage en fagot



Le périmètre à couvrir est composé de six segments de longueur un diamètre et de six arcs de cercle de longueur un sixième de circonférence.

La longueur du ruban est donc, en cm :

$$\ell' = 6 \times 20 + 20\pi$$
$$\ell' = 120 + 20\pi$$

Exercice 4 : Découpages gagnants

1. Dans la figure 1, une certaine « symétrie » existe autour du triangle noir.
Au départ, Amandine a deux possibilités de découpages.
Soit elle laisse à Benjamin 2 triangles blancs et 1 triangle noir, soit 3 triangles blancs et 1 triangle noir.
Puis Benjamin procède de même et peux céder à Amandine: 2 triangles blancs+1 noir ou 1 triangle blanc+1 noir ou finalement 1 triangle noir (dans ce cas Amandine gagne au prochain tour).

Benjamin est sûr de gagner s'il cède à Amandine 1 triangle blanc et 1 triangle noir.
Avec les pièces que pourrait lui donner Amandine au 1er tour, Benjamin peut toujours s'arranger pour découper et ne céder que le nécessaire (en retirant 1 triangle blanc ou 2).

2. Si Amandine joue la première, elle a 7 sections possibles.
Il faut les étudier une à une et vérifier si, au tour suivant, Benjamin serait en mesure de découper pour réobtenir la figure 1.
Si c'est le cas, nous savons, d'après la question 1., que Benjamin peut s'arranger pour toujours gagner.

Une fois tous les premiers découpages étudiés, on s'aperçoit qu'un seul est propice à la victoire d'Amandine.
Amandine doit retirer le triangle blanc qui se trouve au « sommet » de la figure 2.
Ainsi, Benjamin se trouve contraint de retirer 3 triangles blancs ou 5 triangles blancs.
Il cède ainsi à Amandine une pièce qu'elle peut découper pour revenir à la figure 1.
Amandine cède alors une figure qui est similaire à la figure 1.
On se retrouve dans la situation de la question 1, Amandine, comme Benjamin, peut bien jouer et être sûre de gagner !