Eléments de solution

Classes de quatrième

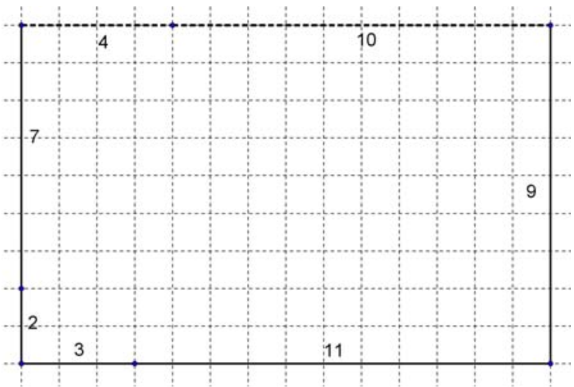
Exercice 1 : des heures carrées

Les affichages possibles pour les heures sont : 00, 01, 04, 09, 16 et pour les minutes : 00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49. Le temps de parcours étant 4 h 20 min, on distingue deux cas selon que le nombre de minutes affichées au départ est 49 (auquel cas il y a une retenue quand on ajoute 4 h 20 min) ou qu'il est inférieur à 49 (c'st-à-dire finalement à 36, l'addition s'effectuant sans retenue).
1. **Cas d'une heure de départ se terminant par 49 min**
On cherche deux carrés d'entiers dont la différence soit 5. L'heure de départ est 4 h 49 et l'heure d'arrivée 9 h 09.
2. **Cas d'une heure de départ ne se terminant pas par 49**
On cherche cette fois des carrés d'entiers dont la différence soit 20 (pour les minutes) et des carrés d'entiers dont la différence soit 4 (pour les heures). L'heure de départ est 00 h 16 et l'heure d'arrivée 04 h 36.

Exercice 2 : Barrières puzzle

1. Le périmètre commun à tous les terrains possibles est 46, somme de toutes les longueurs des barrières.

2. Un côté du rectangle mesure 9, le côté opposé doit mesurer également 9. Deux des barrières restantes mesurent plus de 9, une moins de 9 et la dernière 9, elle est donc la seule envisageable. Il reste alors trois barrières à arranger dont la somme avec 3 fait 28, deux fois 14. 11 va donc avec 3 et 4 avec 10 (dans l'ordre qu'on voudra).



3. Les seuls arrangements possibles pour obtenir la somme 7 sont d'une part 7 et de l'autre 4 et 3. Il reste une longueur 11 + 10 + 9 +2 = 32 à partager en deux, mais aucune des sommes réalisables avec 11, 10, 9 et 2 n'est 16 ?

Il n'est effectivement pas possible de réaliser un entourage rectangulaire de largeur 7.

4. Le périmètre du rectangle étant 46, le plus grand côté a une longueur nécessairement supérieure strictement à 11 (car 4 fois 11 font 44). La largeur, compte tenu des barrières disponibles, est au moins égale à 7 (les sommes 2, 3, 4 et 5 ne sont réalisables qu'une seule fois, et 6 pas du tout). Et comme un rectangle de largeur 7 ne peut être réalisé, la largeur est au moins égale à 9 (8 ne peut être obtenu comme somme de nombres pris parmi, 2, 3, 4 et 7). Pour réaliser le demi-périmètre 23 comme somme d'un nombre au moins égal à 12 et d'un nombre au moins égal à 9, il reste : 9 + 14, 10 + 13 et 11 + 12.

La première éventualité est réalisable (question 2) et l'aire obtenue est 126 m².

La seconde est réalisable avec les sommes (7+3) et 10 comme largeur, (11+2) et (9+4). L'aire obtenue est 130 m².

La troisième est réalisable avec les sommes (7+4) et 11 comme largeur, (10+2) et (9+3). L'aire obtenue est 132 m².

Exercice 3 : Partie de fléchettes

1. 26 = 7 + 7 + 7 + 5, 43 = 11 + 11 + 11 + 5 + 5 , et 220 012 = 220 005 + 7 , ce qui, 220 005 étant un multiple de 5, prouve le résultat.

2. *a.* 40 peut être obtenu avec les répartitions (11, 11, 11, 7), (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5), (7, 7, 7, 7, 7, 5), (11, 7, 7, 5, 5, 5)

b. 34 peut être obtenu avec les répartitions (11, 11, 7, 5) et (7, 7, 5, 5, 5, 5). Rien d'autre n'est possible, en effet :

- une répartition contenant 3 fois 11 ne peut contenir ni un 7 (33 + 7 = 40) ni un 5 (33 + 5 = 38)

- une répartition contenant 2 fois 11 ne peut contenir qu'un seul 7 (22 + 14 = 36). C'est celle trouvée ci-dessus.

- une répartition contenant un seul 11 ne peut contenir ni quatre, ni trois, ni deux ni un 7, et si elle ne contient pas de 7, elle ne peut contenir cinq 5 ni évidemment moins (les sommes correspondantes sont à essayer chaque fois)

- une répartition ne contenant pas de 11 ne peut contenir ni cinq, ni quatre, ni trois 7. Une répartition contenant deux 7 a été proposée ci-dessus. Une répartition ne contenant qu'un 7 n'est pas envisageable, car 27 n'est pas multiple de 5, et comme 34 n'est pas multiple de 5, une répartition ne contenant que des 5 n'est pas envisageable.

3.

11	11	11	**33**
11	11	7	**29**
11	11	5	**27**
11	7	7	**25**
11	7	5	**23**

11	5	5	**21**
7	7	7	**21**
7	7	5	**19**
7	5	5	**17**
5	5	5	**15**

4. *a.* 14 = 7 + 7, 15 = 5 + 5 + 5, 16 = 11 + 5, 17 = 7 + 5 + 5, 18 = 11 + 7

b. Tous les entiers supérieurs ou égaux à 14 peuvent être atteints, puisque 14 + 5 = 19, tous les entiers suivants sont les sommes d'un des cinq suivants de 14 et d'un multiple de 5. Il reste à déterminer ceux des nombres inférieurs à 14 qui ne sont pas atteignables. Il en est ainsi de **1, 2, 3, 4**, puis de **6, 8, 9** qui ne sont pas multiples de 5 ni de 7 et qui sont inférieurs à 11 (et par conséquent à 5 + 7), puis de **13** (on peut détailler tous les « possibles » impossibles).

Exercice 4 : Creusez de plus en plus mais de moins en moins

1. À chaque étape, l'aire de la carpette diminue de $\frac{1}{9}\cdot$ On souhaite donc déterminer la première puissance de $\frac{8}{9}$ inférieure à $\frac{1}{2}\cdot$

Le tableau suivant nous y aide :

1	0,89
2	0,79012346
3	0,70233196
4	0,62429508
5	0,55492896
6	0,49327018
7	0,43846239
8	0,38974434
9	0,34643942
10	0,30794615

On devrait conclure que c'est à l'étape 6 que la fraction représentée par l'aire restante est inférieure à $\frac{1}{2}\cdot$ Nous avons calculé avec des valeurs approchées, il y a donc un doute, mais comme la valeur 0,89 est une valeur approchée par excès, on peut conclure comme le tableau nous y incite.

2. Les 7 cubes ôtés le sont sur un total de 27 cubes identiques chaque fois. La fraction de volume qui demeure après chaque étape est donc $\frac{20}{27}\cdot$ On construit un tableau :

1	0,74	… qui montre que la perte de plus de la moitié de la substance initiale est réalisée dès la troisième étape.
2	0,54869684	
3	0,40644211	