# Exercice n$^o$ 3

(A traiter par les candidats des séries **autres que S**)

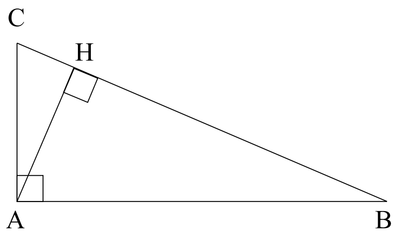
## Enoncé

### Volumes

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A.

On note $V_A$ le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (BC), $V_B$ le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (CA) et $V_C$ le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (AB).

***On rappelle que le volume d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur h est*** $\dfrac{\pi R^2 h}{3}$.




**1.** Représenter à main levée sur trois schémas distincts chacun des solides ainsi obtenus.

**2.** On admet que $V_A$ est le plus petit des trois nombres $V_A$, $V_B$ et $V_C$. Démontrer qu'un triangle dont les côtés ont pour longueurs $\dfrac{1}{V_A}$, $\dfrac{1}{V_B}$ et $\dfrac{1}{V_C}$ est un triangle rectangle.

## Solution

**Question 1 :** schémas non reproduits ici

**Question 2 :**
$V_A$ est le plus petit des trois nombres positifs $V_A$, $V_B$ et $V_C$, donc $\dfrac{1}{V_A}$ est le plus grand des nombres $\dfrac{1}{V_A}$, $\dfrac{1}{V_B}$ et $\dfrac{1}{V_C}$.

Répondre à la question posée revient donc à montrer que :

$$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \left(\frac{1}{V_A}\right)^2$$

et à conclure par la réciproque du théorème de Pythagore.

$\left(\frac{1}{V_A}\right)^2 = \left(\frac{3}{\pi\ AH^2\ (BH+HC)}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2\ AH^4\ BC^2}$ car le solide de volume $V_A$ est la réunion de deux cônes de révolution de hauteurs respectives $BH$ et $HC$.

$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 = \left(\frac{3}{\pi\ AB^2\ AC}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2\ AB^4\ AC^2}$ ;

de même $\left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AC^4 AB^2}\cdot$

$$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AB^4 AC^2} + \frac{9}{\pi^2 AC^4 AB^2} = \frac{9(AB^2+AC^2)}{\pi^2 AC^4 AB^4}\cdot$$

ABC est un triangle rectangle en A ; d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

D'autre part, $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2}\cdot$ (Il s'agit de deux expressions de l'aire du triangle ABC).

D'où $AB^4 \times AC^4 = BC^4 \times AH^4$.

Il vient :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 &= \frac{9(AB^2+AC^2)}{\pi^2 AC^4 AB^4} = \frac{9BC^2}{\pi^2 BC^4 AH^4}\\ &= \frac{9}{\pi^2 BC^2 AH^4} = \left(\frac{1}{V_A}\right)^2.\end{aligned}$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, un triangle de longueur de côtés $\frac{1}{V_A}$, $\frac{1}{V_B}$ et $\frac{1}{V_C}$ est un triangle rectangle.