Exercice n^o 3 (Séries L-ES-STI S)

Enoncé

1. Question préliminaire :

   À l'aide de la calculatrice, déterminer tous les entiers naturels a et b avec $a \leqslant b$ tels que : $a^2 + b^2 = 225$.

2. On cherche tous les triangles ABC rectangles en A, tels que AB $= 8$ et tels que BC et AC s'expriment à l'aide de nombres entiers.

   (a) Calculer $\mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2$.

   (b) Donner toutes les décompositions possibles de 64 sous la forme d ?un produit de deux entiers naturels.

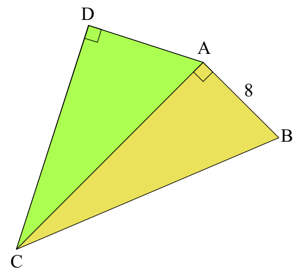
   (c) y et z étant deux nombres entiers naturels, résoudre le système suivant :

   $$\begin{cases} z + y & = & 16 \\ z - y & = & 4 \end{cases}$$

   En déduire un couple de valeurs possibles pour AC et BC.

   (d) Peut-on trouver d'autres couples de valeurs pour AC et BC ?

3. On considère la figure suivante :



Déterminer les longueurs AC, BC, AD et CD sachant que ces longueurs s'expriment à l'aide de nombres entiers.

Eléments de solution

1. Question préliminaire

A l'aide de la calculatrice, $a = 9$ et $b = 12$ sont les seuls entiers naturels avec $a \leqslant b$ tels que $a^2 + b^2 = 225$.

2.a) Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'où $BC^2 - AC^2 = AB^2 = 8^2 = 64$.

b) $64 = 1 \times 64$
$64 = 2 \times 32$
$64 = 4 \times 16$
$64 = 8 \times 8$.

c) Le couple $(y = 6\ ;\ z = 10)$ est solution du système.
Dès lors, $64 = 16 \times 4 = (z + y)(z - y) = z^2 - y^2 = BC^2 - AC^2$.
Le couple $(AC = 6\ ;\ BC = 10)$ répond donc à la question.

y et z ont joué le rôle de AC et BC.
Seules les valeurs entières positives de y et z nous intéressent.
Considérons les autres décompositions de 64 et étudions les systèmes associés compte tenu que $z + y \geqslant z - y$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} z+y & = & 64 \\ z-y & = & 1 \end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{lcl} z+y & = & 32 \\ z-y & = & 2 \end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{lcl} z+y & = & 8 \\ z-y & = & 8 \end{array}\right.$$

Seul le deuxième système permet d'obtenir des valeurs entières strictement positives. Le couple $(AC = 15\ ;\ BC = 17)$ répond donc à la question.

Remarque : on a déterminé tous les couples $(AC\ ;\ BC)$ répondant à la question.

3. D'après ce qui précède, soit $AC = 6$ soit $AC = 15$.
Or il n'existe pas d'entiers naturels avec $a \leqslant b$ tels que : $a^2 + b^2 = 36$.
Le cas $AC = 6$ est donc exclu.

D'autre part, d'après la question préliminaire, $9^2 + 12^2 = 15^2$, 9 et 12 étant les seuls entiers qui vérifient $a^2 + b^2 = 225$.
On en déduit : $AC = 15$, $BC = 17$, $AD = 9$ et $DC = 12$.