Exercice n^o 2 (Série S)

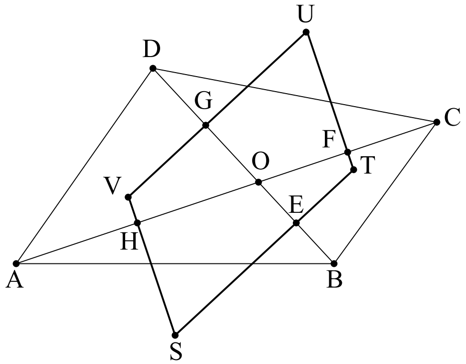
Enoncé

Partage

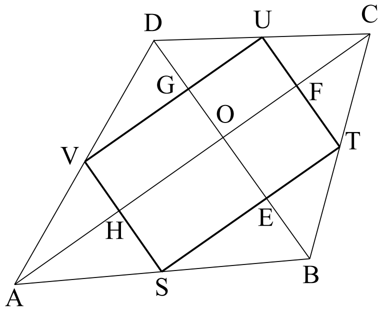
L'intérieur d'un quadrilatère ABCD est partagé en quatre triangles par ses diagonales.
Les centres des cercles circonscrits à ces quatre triangles forment un quadrilatère STUV.

1. Montrer que STUV est toujours un parallélogramme.
2. Quelles propriétés doit avoir le quadrilatère ABCD pour que STUV soit un carré.

Eléments de solution



1) On raisonne sur la figure suivante :
S et T se trouvent sur la médiatrice de [OB], donc (ST) est perpendiculaire à (OB).
De même, (UV) est perpendiculaire à (OD).
Et puisque D, O et B sont alignés, on obtient que (ST) est parallèle à (UV).
De même, (TU) est parallèle à (VS).
Le quadrilatère STUV est donc un parallélogramme.



2) Ensuite, grâce à la somme des angles dans le quadrilatère OETF, il vient que les angles $\widehat{EOF}$ et $\widehat{ETF}$ sont supplémentaires (car $\widehat{OET} = \widehat{OFT} = 90^o$.
Or $\widehat{EOF}$ et $\widehat{COD}$ sont aussi supplémentaires. Donc $\widehat{ETF} = \widehat{COD}$.
Pour que STUV soit un carré, il faut déjà avoir $\widehat{ETF} = 90^o$. Donc $\widehat{COD} = 90^o$: le quadrilatère ABCD doit avoir ses diagonales perpendiculaires.
On obtient l'exemple ci-contre.
STUV est un rectangle mais pas encore un carré !
Les quatre triangles OAB, OBC, OCD et ODA sont rectangles en O. Et les cercles circonscrits sont centrés sur les milieux des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Donc par application des propriétés de la droite des milieux, on obtient $ST = \dfrac{AC}{2}$ et $TU = \dfrac{BD}{2}$.
Pour que STUV soit un carré, il faut alors ajouter la contrainte $ST = TU$, ce qui donne $AC = BD$.

Pour que STUV soit un carré, la quadrilatère ABCD doit donc avoir ses diagonales perpendiculaires et de même longueur. Par exemple :