Exercice n$^{\text{o}}$ 3 (Séries STI/STL)

Enoncé

Fonction

Soit la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty]$ par

$$f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}.$$

1. A l'aide de votre calculatrice, étudier le comportement de f sur l'intervalle $I_1 = [5\ ;\ 10]$. Quelle conjecture vous suggère cette méthode ?
2. Démontrer cette conjecture (on pourra poser $x = u^2 + 1$, avec $u \geqslant 0$).
3. Donner une expression simplifiée de f sur les intervalles $I_2 = [1\ ;\ 5]$ et $I_3 = [10\ ;\ +\infty[$.

Eléments de solution

1) D'après la calculatrice, il semblerait que la fonction f soit constante sur $[5\ ;\ 10]$, égale à 1.

2) Posons $x = u^2 + 1$ avec $u \geqslant 0$ (donc $\sqrt{u^2} = u$).

On a $f(x) = \sqrt{u^2 + 1 - 4\sqrt{u^2} + 3} + \sqrt{u^2 + 1 - 6\sqrt{u^2} + 8}$
$= \sqrt{u^2 - 4u + 4} + \sqrt{u^2 - 6u + 9}$
$= \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(3-u)^2}$

Ensuite $x = u^2 + 1$, donc $u = \sqrt{x-1}$.
Puisque $5 \leqslant x \leqslant 10$, donc $2 \leqslant u \leqslant 3$. Donc $u - 2 \geqslant 0$ et $3 - u \geqslant 0$.
Alors $f(x) = (u-2) + (3-u) = 1$.

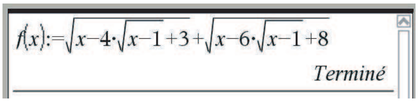
3) Le changement de variable $x = u^2 + 1$ est valable pour tout x supérieur à 1.
Donc l'expression $f(x) = \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(3-u)^2}$ est toujours valable.
Alors, si $1 \leqslant x \leqslant 5$, on a $0 \leqslant u \leqslant 2$. Donc $u - 2 \leqslant 0$ et $3 - u > 0$.

Ce qui donne : $f(x) = (2 - u) + (3 - u) = 5 - 2u = 5 - 2\sqrt{x-1}$.
Et si $x \geqslant 10$, alors $u \geqslant 3$. Alors $u - 2 > 0$ et $3 - u \leqslant 0$.
D'où $f(x) = (u - 2) + (u - 3) = 2u - 5 = 2\sqrt{x-1} - 5$.

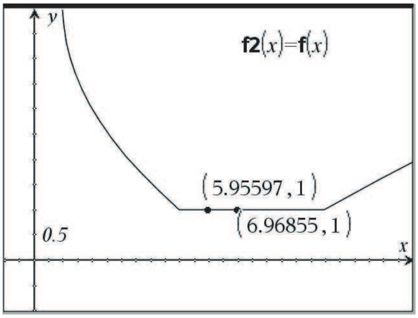
Avec une calculatrice par A. Guillemot
Utilisation d'une calculatrice formelle (ici TI-Nspire)

1. Commençons par entrer la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}.$$

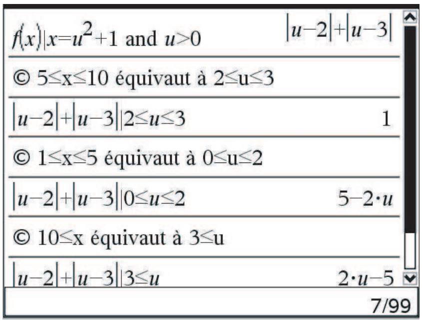


Représentons cette fonction dans un repère approprié.



Sur l'intervalle [; 10], cette fonction semble être constante et valoir 1.

2. Utilisons le changement de variable suggéré par l'énoncé.
La calculatrice nous donne :



Comme $u = \sqrt{x-1}$, nous avons les simplifications suivantes de $f(x)$:

Pour $1 \leqslant x \leqslant 5$ $f(x) = 5 - 2\sqrt{x-1}$
Pour $5 \leqslant x \leqslant 10$ $f(x) = 1$
Pour $x \geqslant 10$ $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 5$.