Olympiades nationales de mathématiques

Académie d'Amiens

Mercredi 11 mars 2020 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Première générale spécialité mathématiques

Énoncés de la première partie de 8h à 10h

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

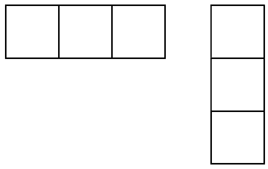
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice national 1

Batailles navales

Un joueur effectue une sorte de « bataille navale » sur un damier carré de $n \times n$ cases, avec $n \geq 3$.

Un bateau est représenté par un rectangle constitué de trois cases de la taille des cases du damier. Il est placé horizontalement ou verticalement sur trois cases du damier.



Le bateau est invisible du joueur.

Le joueur effectue plusieurs tirs sur des cases distinctes du damier dans le but de toucher au moins une des cases occupées par le bateau.

On appelle *« jeu optimal »* un ensemble de tirs permettant de toucher le bateau à coup sûr, quelle que soit la position occupée par celui-ci, et comprenant le nombre minimal de tirs pour y parvenir.

On note $\mathrm{J}(n)$ le nombre de tirs réalisés dans un jeu optimal. Le but de cet exercice est de déterminer $\mathrm{J}(n)$ et de réaliser un jeu optimal effectif.

Partie A : étude de trois cas particuliers

1. Cas où $n = 3$
- **a.** Combien de positions différentes le bateau est-il susceptible d'occuper sur le damier ?
- **b.** Reproduire le damier sur la copie et indiquer trois cases sur lesquelles tirer pour que le bateau soit touché à coup sûr. On placera une croix ($\times$) dans chacune de ces cases.
- **c.** Montrer qu'on ne peut pas réaliser un jeu optimal avec deux tirs.
- **d.** En déduire que $\mathrm{J}(3) = 3$.

2. Cas où $n = 4$
- **a.** Sur un damier 4×4, indiquer cinq positions pour le bateau qui n'ont aucune case en commun deux à deux. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{J}(4)$?
- **b.** Représenter un jeu optimal à cinq tirs sur un damier 4×4. En déduire $\mathrm{J}(4)$.

3. Cas où $n = 5$. Montrer que $\mathrm{J}(5) = 8$.

Partie B : cas général

1. Cas où $n = 3p$, avec p entier et $p \geq 1$
- **a.** Indiquer une façon de placer sur le damier un nombre maximal de positions disjointes deux à deux pouvant être occupées par le bateau. Que peut-on dire de $\mathrm{J}(3p)$?
- **b.** En utilisant le schéma proposé en **A1.b**, expliquer comment réaliser un jeu optimal pour $n = 3p$.
- **c.** Montrer que $\mathrm{J}(3p) = 3p^2$.

2. Cas où $n = 3p + 1$, avec p entier et $p \geq 1$
- **a.** Combien peut-on placer au maximum sur le damier de positions du bateau disjointes deux à deux ?
- **b.** Réaliser un jeu optimal pour $n = 3p + 1$ en expliquant avec précision la démarche.
- **c.** Que vaut $\mathrm{J}(3p + 1)$?

3. Recherche d'une caractérisation commune de $\mathrm{J}(n)$, pour tout entier $n \geq 3$.
On traite le cas $n = 3p + 2$ par des raisonnements analogues à ceux des cas $n = 3p$ et $n = 3p + 1$ et on obtient : $J(3p + 2) = 3p^2 + 4p + 1$.
- **a.** Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $\mathrm{J}(n)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.
- **b.** Existe-t-il un entier n tel que $J(n)$= 2020?

Exercice national 2

Ensembles surprenants

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Dans tout l'exercice, les ensembles considérés sont des sous-ensembles finis non vides de $\mathbb{N}^*$**.**
Si A est un tel ensemble, on désigne par $P(A)$ le produit des éléments de A et par $C(A)$ la somme des carrés des éléments de A.
Par exemple, si $A = \{1, 2, 5\}$, alors $P(A) = 1 \times 2 \times 5 = 10$ et $C(A) = 1^2 + 2^2 + 5^2 = 30$.

On dit qu'un ensemble fini A est *surprenant* si $P(A) = C(A)$.

1. Deux exemples.
a. L'ensemble $\{1, 2, 3, 2020\}$ est-il surprenant ?
b. L'ensemble $\{6, 15, 87\}$ est-il surprenant ?

2. On considère un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$ tel que $P(A) \geq 5$.
a. Quels sont les nombres x vérifiant l'égalité
$$xP(A) = P(A) - 1 + x^2 \ ?$$
b. Montrer que le nombre $P(A) - 1$ n'appartient pas à A.
c. On note A' l'ensemble obtenu en ajoutant l'entier $P(A) - 1$ à l'ensemble A. En d'autres termes,
$$A' = A \cup \{P(A) - 1\}.$$
Exprimer $P(A') - C(A')$ en fonction de $P(A) - C(A)$.
d. En déduire que si $P(A) > C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.
e. Trouver un ensemble surprenant contenant l'ensemble $\{3, 4, 9\}$.

3. On considère à nouveau un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$ tel que $P(A) \geq 5$.
a. Prouver que le nombre $P(A) - 2$ n'appartient pas à A.
b. En déduire que si $P(A) < C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.

4. En déduire finalement que, pour tout sous-ensemble fini non vide A de $\mathbb{N}^*$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.

5. Montrer qu'on peut trouver un ensemble surprenant ayant 67 éléments et contenant $A = \{1, 2, 5\}$.