MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques

Académie d'Amiens

Mercredi 11 mars 2020 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Première générale spécialité mathématiques

Énoncés de la deuxième partie de 10h10 à 12h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

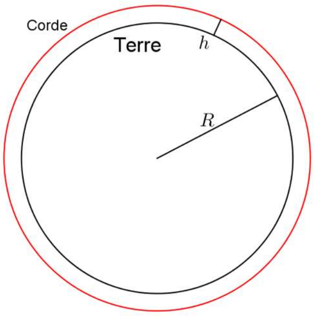
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

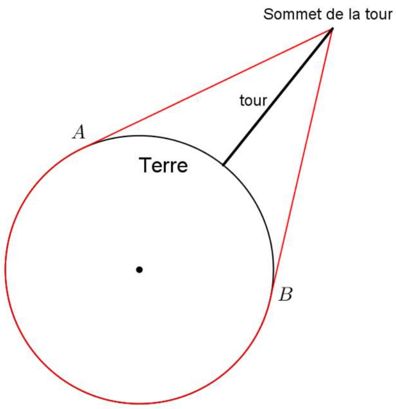
<u>Préambule :</u> Soit $k \in \mathbb{R}$, on admettra que la solution de l'équation d'inconnue réelle x, $x^3 = k$ est $x = k^{\frac{1}{3}}$.



On estime que la circonférence de la Terre est de 40 000 km.
On note R le rayon de la Terre, exprimé en kilomètres.
On tend une corde tout autour de la Terre supposée parfaitement sphérique.

1. De quelle longueur faut-il rallonger la corde pour pouvoir la fixer au sommet de piquets de hauteur h, répartis tout autour de la Terre ? (on suppose que la forme de la corde reste circulaire).

2. On suppose que les piquets utilisés mesurent 2 m de haut. Quelle est la longueur de la corde utilisée ?



3. La corde ayant été ainsi rallongée, on décide de supprimer les piquets et de tendre à nouveau la corde autour de la Terre. On arrime alors la corde au sommet d'une tour. On cherche la hauteur de la tour, sachant qu'aux points de contact A et B, la corde est tangente au cercle.
On note O le centre du cercle représentant la Terre, S le sommet de la tour et θ l'angle $\widehat{BOS}$.

   a. Calculer la longueur des segments $[AS]$ et $[SB]$ en fonction de θ.

   b. Calculer en fonction de θ la longueur de la corde correspondant à l'arc de cercle d'extrémités A et B.

   c. En déduire que $\tan(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{R}$.

   d. On admet que θ est suffisamment petit pour vérifier l'approximation : $\tan(\theta) - \theta \approx \frac{\theta^3}{3}$.
   En déduire une valeur approchée de l'angle θ à 10^{-3} près.

   e. Déterminer une approximation de la hauteur de la tour au mètre près.

Exercice académique 2

« Les trois pik »

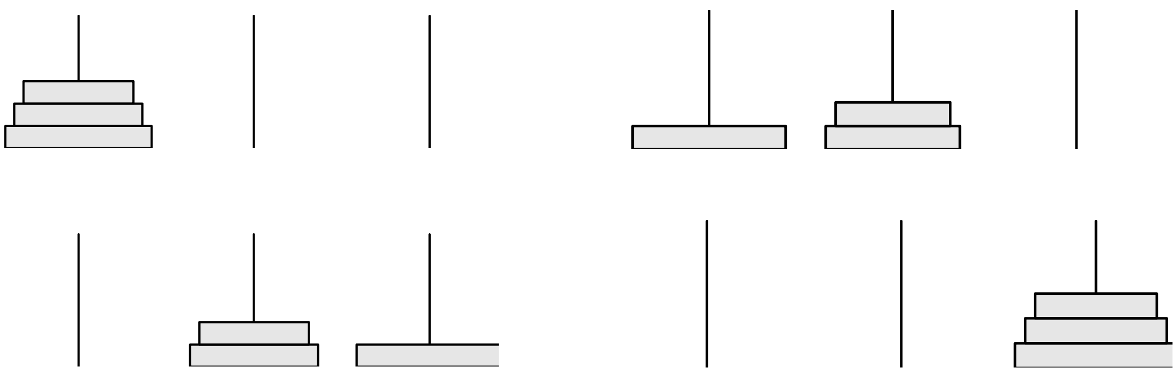
Considérons trois piquets avec socle, numérotés 1, 2 et 3, et n disques troués en leur milieu, tous de tailles différentes. On suppose que les n disques sont empilés initialement sur le piquet 1 par ordre décroissant de taille (le plus grand des disques se trouve donc tout en bas de la pile). On cherche à déplacer les n disques du piquet 1 au piquet 3 en respectant les règles suivantes :
- un seul disque peut être déplacé à la fois sur un autre piquet ;
- un disque ne peut pas être placé sur un disque de taille plus petite que lui.
On note T_n le nombre minimal de mouvements pour déplacer une tour de n disques du piquet 1 au piquet 3.

Partie A : Quelques exemples

1. Vérifier que $T_1 = 1$ et $T_2 = 3$.
2. En détaillant, calculer T_3.

Partie B : Une formule de récurrence

Pour résoudre le problème, il est nécessaire dans un premier temps de déplacer les $n-1$ premiers disques du piquet 1 au piquet 2, en un nombre minimal de mouvements. Le disque le plus grand pourra ainsi être déplacé sur le piquet 3. Il restera alors à déplacer les $n-1$ autres disques du piquet 2 au piquet 3, avec un nombre de déplacements minimal.



1. À l'aide des informations précédentes, en déduire une expression de T_n en fonction de T_{n-1}.
2. En déduire les valeurs de T_4, T_5, T_6 et T_7.
3. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de la suite (T_n) ?

On remarque qu'il peut être rapidement fastidieux de calculer des termes de la suite (T_n) pour des valeurs de n assez élevées. Nous allons donc chercher une formule plus simple, dite explicite, afin de répondre à une problématique donnée sur un temps de résolution pour un nombre de disques n donné.

Partie C : Temps de résolution

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $U_n = T_n + 1$.

1. Déterminer la nature de la suite (U_n).
2. En déduire une expression de U_n en fonction de n, puis de T_n en fonction de n.
3. Si l'on suppose que le déplacement d'un disque est réalisé en une seconde, combien de temps, exprimé en années, faudra-t-il pour résoudre le problème avec une tour de 32 disques ? On arrondira au nombre entier supérieur.

Partie D : Une question d'algorithmique

1. On note i le numéro du piquet de départ, j le numéro du piquet d'arrivée, k le numéro du piquet non utilisé. Que vaut i + k + j ?
2. Quel est le rôle de la fonction Python suivante ?

```
def pik(n, i, j):
   if n == 1:
      print("Déplacement de ", i, " vers ", j)
   else:
      k = 6 - i - j
      pik(n-1, i, k)
      print("Déplacement de ", i, " vers ", j)
      pik(n-1, k, j)
```