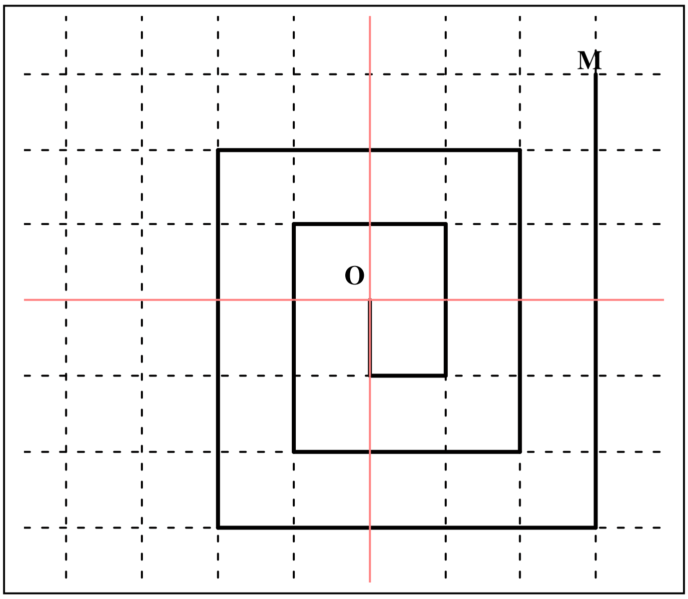
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

ACADEMIE d'AMIENS SESSION 2006

Sujets ES/ L et sections technologiques

Exercice 1 : la « spirale »

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note *l*(M) la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que OA=5.
   Déterminer les valeurs possibles de *l*(A).

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer *l*(B).

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que *l*(C)=2006.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

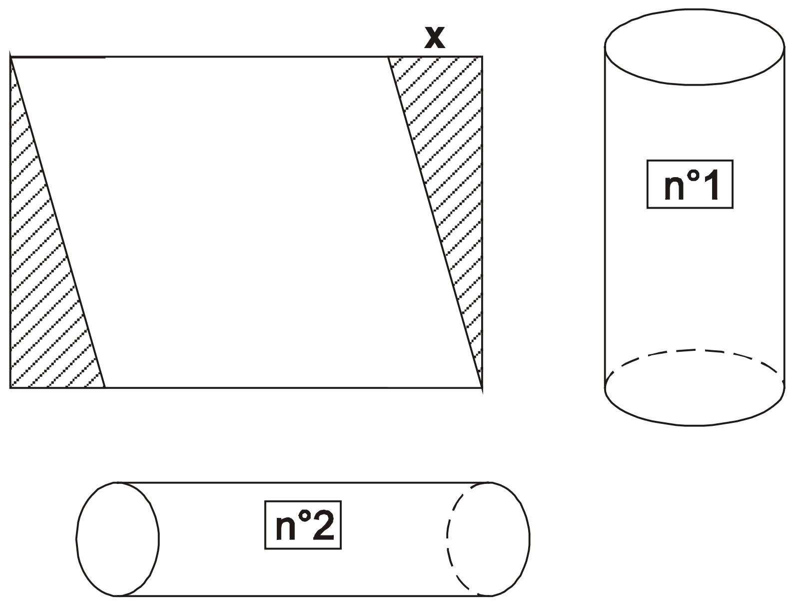
On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, 1+2+3+…+n = $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2 : Les cylindres de papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :

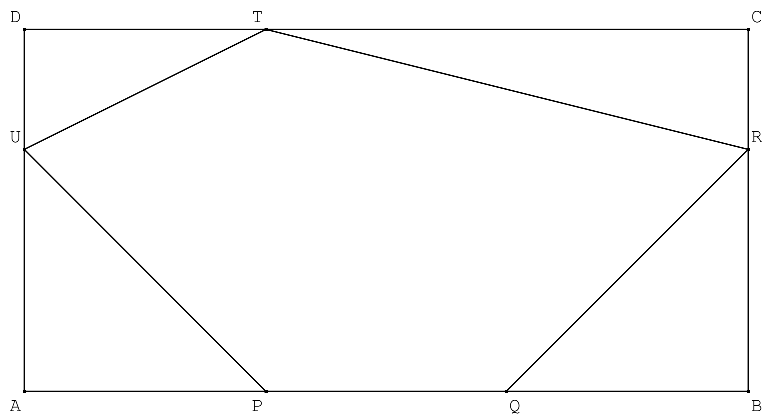


Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice 3 « le billard »

On considère une table de billard rectangulaire ABCD. P et Q sont donnés sur [AB]
Où la balle, partant de Q, doit-elle frapper en R sur [BC] pour qu'après un rebond sur chacun des deux autres côtés elle revienne en P ?



Exercice 4

Soient deux réels strictement positifs x et y.

1) Démontrer que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

2) En déduire les deux résultats indépendants suivants :

- a) Si x, y et z sont des réels strictement positifs alors
  $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$, dans quel cas a-t-on égalité ?

- b) Si x et y sont des réels strictement positifs déterminer le minimum du produit

$$\sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$