Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

académie Amiens
RÉGION ACADÉMIQUE HAUTS-DE-FRANCE

Académie d'Amiens

Mercredi 14 mars 2018 de 8 heures à 12 heures 10

Pause de 10 heures à 10 heures 10

Séries ES/L/STMG/ST2S/STI2D/STL/STD2A

Énoncés de la première partie de 8 heures à 10 heures

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant.**

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice national numéro 1

Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle ABC est à peu près rectangle en un sommet A si la mesure de l'angle en A est dans l'intervalle [75°, 105°]. On dit qu'un triangle ABC est à peu près isocèle en un sommet A si les mesures des angles en B et en C diffèrent de 15° au maximum.

1. ***a.*** Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?

3. Écrire un programme (en langage naturel ou calculatrice), à recopier sur votre copie, testant si un triangle ABC dont on connaît les trois angles en A, B et C est à peu près isocèle.

Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :
- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent de 0,1 ou moins ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, de 0,1 ou moins.

4. ***a.*** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?

5. On considère un cercle, de centre O de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle : A, fixe, et B, mobile. On appelle I le milieu du segment $[OA]$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).
a. Représenter sur une figure l'ensemble des points B pour lesquels H et I sont à peu près égaux. En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
b. Si H et I sont à peu près égaux, le triangle AOB est-il à peu près équilatéral ?

Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle ABC par les mesures x et y de ses angles en A et B. Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure 10° par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
a. Le domaine $\mathcal{T}$ constitué des points représentant tous les triangles ;
b. Le point E représentant les triangles équilatéraux ;
c. L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.

7. ***a.*** Quelle partie $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles ?
b. Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de $\mathcal{A}$ à l'aire de $\mathcal{T}$, quelle est cette proportion ?

8. Quelle partie $\mathcal{R}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

Exercice national numéro 2

Boules de même couleur

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{2}$.

1. ***a.*** Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $P(G) = \frac{7}{15}$.
b. Calculer $P(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.

2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.
a. Soit x le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
Démontrer que $P(G) = \frac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$.
b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable ?

3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.
a. On suppose que l'urne présente la configuration (a, b) c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, a boules rouges et b boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque $n = (a - b)^2$.
b. Réciproquement démontrer que si n est le carré d'un entier p alors il existe deux entiers naturels a et b avec $a \geq b$ que l'on exprimera en fonction de p tels que la configuration (a, b) conduise à un jeu équitable.
c. Donner six couples (a, b) conduisant à un jeu équitable.

4. Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration (a, b, c), c'est-à-dire, par exemple, a boules blanches, b rouges et c noires.
a. Montrer que si $n = 13$, le jeu est équitable lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = 91$. En déduire une configuration (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour $n = 13$.
b. Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple (x, y) conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de z non nulle telle que le triplet (x, y, z) conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.
c. Donner un triplet (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.

5. On suppose que l'urne contient des boules de m couleurs différentes où $m \geq 2$.
Démontrer que la configuration $(1, 3, 9, \dots, 3^{m-1})$ conduit à un jeu équitable.