Olympiades nationales de mathématiques

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

académie Amiens
RÉGION ACADÉMIQUE HAUTS-DE-FRANCE

Académie d'Amiens

Mercredi 14 mars 2018 de 8 heures à 12 heures 10

Pause de 10 heures à 10 heures 10

Série S

Énoncés de la première partie de 8 heures à 10 heures

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant.**

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice national numéro 1

Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle ABC est à peu près rectangle en un sommet A si la mesure de l'angle en A est dans l'intervalle [75°, 105°]. On dit qu'un triangle ABC est à peu près isocèle en un sommet A si les mesures des angles en B et en C diffèrent de 15° au maximum.

1. ***a.*** Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?

3. Écrire un programme (en langage naturel ou calculatrice), à recopier sur votre copie, testant si un triangle ABC dont on connaît les trois angles en A, B et C est à peu près isocèle.

Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :
- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent de 0,1 ou moins ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, de 0,1 ou moins.

4. ***a.*** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?

5. On considère un cercle, de centre O de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle : A, fixe, et B, mobile. On appelle I le milieu du segment $[OA]$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).
a. Représenter sur une figure l'ensemble des points B pour lesquels H et I sont à peu près égaux. En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
b. Si H et I sont à peu près égaux, le triangle AOB est-il à peu près équilatéral ?

Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle ABC par les mesures x et y de ses angles en A et B. Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure 10° par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
a. Le domaine $\mathcal{T}$ constitué des points représentant tous les triangles ;
b. Le point E représentant les triangles équilatéraux ;
c. L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.

7. ***a.*** Quelle partie $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles ?
b. Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de $\mathcal{A}$ à l'aire de $\mathcal{T}$, quelle est cette proportion ?

8. Quelle partie $\mathcal{R}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

Exercice national numéro 2

Ensembles arithmétiques

Un ensemble S de rationnels est un ensemble arithmétique (en abrégé EA) si pour tout couple (a, b) avec a et b appartenant à S, il existe un élément c de S tel que l'un des nombres a, b ou c est la moyenne arithmétique (c'est-à-dire la demi-somme) des deux autres. On souhaite déterminer tous les entiers n strictement positifs pour lesquels il existe un EA ayant n éléments.

1. *a.* Les ensembles suivants sont-ils des EA ? Justifier.

$S_1 = \{0,1,2\}$ $\quad$ $S_2 = \{0,1,2,3\}$ $\quad$ $S_3 = \{0,1,2,4\}$ $\quad$ $S_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

b. Démontrer qu'il n'existe pas d'EA à 2 éléments. Que dire des singletons (ensembles à un seul élément) ?

c. Donner un EA ayant 5 éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

2. *a.* Outre $\frac{a+b}{2}$, quels sont les deux autres rationnels à envisager pour vérifier qu'un couple (a, b) d'éléments de S ne fait pas échec à la définition d'un EA ?

b. On désire écrire un algorithme qui teste si un ensemble est un EA. L'ensemble S est encodé sous la forme d'une liste S = [S[1],..,S[n]] de taille n. Par exemple la moyenne arithmétique du $i$ème et du $j$ème élément de S s'écrit (S[i]+S[j])/2.

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
        Resultat ← Vrai
        Pour i de 1 à n
                Pour j de 1 à n
                [...]
                Fin Pour
        Fin Pour
        Renvoyer(Resultat)
```

On dispose de plus d'une fonction Appartient(r,S) qui renvoie Vrai lorsque le rationnel r appartient à la liste S et Faux sinon. Compléter le squelette de la fonction ci-contre (à recopier sur sa feuille de composition) pour qu'elle renvoie Vrai si et seulement si S =[S[1],..,S[n]] est un ensemble arithmétique de longueur n.

c. Modifier la fonction pour qu'elle réalise moins d'opérations dans le cas général (à recopier sur sa feuille de composition).

3. Soit n un entier strictement supérieur à 2 et S un EA ayant n éléments dont le plus grand est noté M et le plus petit m. Aux éléments a de S, on associe les nombres $\frac{2(a-m)}{M-m}$. On constitue ainsi l'ensemble S'. Démontrer que S' est un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

4. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

Démontrer que pour tout nombre réel x:

Si x appartient à S et $0 < x < 1$ alors $\frac{x+2}{2}$ appartient à S ;

Si x appartient à S et $1 < x < 2$ alors $\frac{x}{2}$ appartient à S.

En déduire qu'il n'existe pas de EA ayant 4 éléments.

5. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

a. Démontrer que s'il existe un élément a_1 de S tel que $0 < a_1 < \frac{2}{3}$, alors il existe un élément a_2 de S tel que $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$.

En déduire que S ne contient aucun nombre strictement compris entre 0 et $\frac{2}{3}$.

b. Démontrer, de façon analogue, que S ne contient aucun nombre strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1.

c. En déduire que $n \leq 5$.

6. Quels sont les entiers n pour lesquels il existe un EA ayant n éléments ?