MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

RÉGION ACADÉMIQUE HAUTS-DE-FRANCE

Académie d'Amiens

Mercredi 14 mars 2018 de 8 heures à 12 heures 10

Pause de 10 heures à 10 heures 10

Série S

Énoncés de la deuxième partie de 10 heures 10 à 12 heures 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique numéro 1

On dit que deux entiers naturels impairs a et b, dans cet ordre, sont consécutifs si :

$b = a + 2$

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Une k-somme est la somme de k entiers naturels impairs consécutifs.

Par exemple, 24 est une 4-somme, car : $24 = 3 + 5 + 7 + 9$

1.a. Quels sont les entiers compris entre 1 et 20 qui peuvent être écrits comme une 2-somme ?
b. 2018 peut-il être écrit comme une 2-somme ?
c. Quels sont les entiers qui peuvent s'écrire comme la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs ?

2.a. 2018 peut-il être écrit comme une 3-somme ?
b. Montrer que les entiers qui peuvent être écrit comme une 3-somme sont de la forme $9 + 6n$, où n est un entier naturel.

3.a. 2018 peut-il être écrit comme une 4-somme ?
b. Quels sont les entiers qui peuvent être écrit comme une 4-somme ?

4.a. *Somme des n premiers entiers naturels impairs*

On rappelle que, pour tout entier naturel n non nul :

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

b. On rappelle que k est un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que la somme de k entiers naturels impairs consécutifs peut être écrite comme le produit de k par un entier m supérieur ou égal à k et de *même parité* que *k.*

Deux entiers sont de même parité si et seulement si ils sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

c. On rappelle qu'un nombre premier est un entier supérieur à 1 qui n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même.
Un nombre premier peut-il être écrit comme une somme de plusieurs entiers naturels impairs consécutifs ?

d. Écrire 2000 de toutes les façons possibles comme produit de deux entiers k et m de même parité, avec m supérieur ou égal à k .

e. Quels sont les entiers k pour lesquels 2000 peut être écrit comme une k-somme ?

Exercice académique numéro 2

On souhaite résoudre le système suivant :

(S) $$\begin{cases} a+b+c=1 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ a^2+b^2+c^2=2 \end{cases}$$

On pose $\sigma_1 = a+b+c$
$\sigma_2 = ab+ac+bc$
$\sigma_3 = abc$

1. Démontrer que le système (S) équivaut au système (S') suivant : $\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = \sigma_3 \\ {\sigma_1}^2 - 2\sigma_2 = 2 \end{cases}$
2. Soit $(a\,;b\,;c)$ solution de (S).

a. Déterminer les valeurs de σ_1, σ_2 et σ_3.

b. On pose $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.
Démontrer que $p(x) = x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c. Développer $(x-1)(x^2 - \frac{1}{2})$.

d. En déduire les triplets $(a\,;b\,;c)$ solutions de (S).