



# Olympiades nationales de mathématiques



## Académie d'Amiens

Mercredi 15 mars 2017 de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

## Séries STI2D/STL/STD2A

### Énoncés de la deuxième partie de 10 heures 10 à 12 heures 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**



## Exercice académique numéro 1

### Fonctionnement de la mémoire d'un ordinateur

Lors de l'exécution d'un programme informatique, un ordinateur a besoin de stocker des données dans sa *mémoire*. Sous sa forme la plus basique, cette mémoire est accessible via des *pires*.

Pour comprendre son fonctionnement, nous allons utiliser l'analogie suivante :

- Une *donnée* (ici, les nombres et les opérateurs + et  $\times$ ) est représentée par un jeton, marqué de la donnée correspondante.
- Une *pile* est matérialisée par un empilement de ces jetons.
- Pour accéder à un des jetons de la pile, il faut retirer tous les jetons situés au-dessus.

Les actions possibles sur une pile sont les suivantes :

- *Empiler* un jeton sur une pile : ajouter un jeton sur le dessus de la pile.
- *Dépiler* une pile : récupérer le jeton situé sur le dessus de la pile donnée. Ce jeton est alors définitivement perdu.
- Effectuer un *transfert* d'une pile A vers une pile B : Dépiler la pile A (on récupère donc le jeton situé au-dessus de cette pile) et l'empiler sur la pile B.
- *Lire* une pile : récupérer la donnée inscrite sur le jeton situé sur le dessus de cette pile (**et uniquement celui-ci**). On ne fait que lire cette donnée, le jeton reste en place. C'est la seule action qui retourne un *résultat*.

Pour définir une pile, plutôt qu'un dessin, nous utiliserons la syntaxe suivante ( $a_1, a_2, \dots, a_n$  représentant des jetons quelconques) :  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  représente la pile dont les jetons sont, **du bas vers le haut** :  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Dans toute la suite, les lettres minuscules représenteront des nombres.

- 1) Recopier et compléter le tableau ci-contre :

Action	$P_1$	$P_2$	Résultat
Situation initiale	$[a, b, c]$	$[d, e]$	Aucun
Lire $P_1$	$[a, b, c]$	$[d, e]$	« c »
Transfert de $P_1$ vers $P_2$	$[a, b]$	$[d, e, c]$	Aucun
Dépiler $P_1$	$[a]$	$[d, e, c]$	Aucun
Empiler la donnée « f » sur $P_1$	$[a, f]$	$[d, e, c]$	Aucun
Transfert de $P_2$ vers $P_1$			
Lire $P_2$			

- 2) Une pile  $P_1$  contient  $[a, b, c]$ . Est-il possible de lire la donnée du jeton  $b$  sans perdre aucun jeton et sans recourir à une autre pile ?
- 3) Même question, en ayant accès à une deuxième pile  $P_2$ .
- 4) Dans cette question, on dispose de trois piles, notées  $P_1, P_2, P_3$ . Initialement,  $P_1$  contient la pile  $[a, b]$  alors que  $P_2$  et  $P_3$  sont vides. Compléter le tableau suivant :

Action	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Situation initiale	$[a, b]$	Vide	Vide
Transfert de $P_1$ vers $P_3$			
Transfert de $P_1$ vers $P_2$			
Transfert de $P_3$ vers $P_1$			
Transfert de $P_2$ vers $P_1$			

- 5) On dispose encore de trois piles  $P_1, P_2, P_3$  telles que  $P_1$  contient initialement  $[a, b, c]$  et  $P_2$  et  $P_3$  sont vides. Ecrire une succession d'actions permettant de faire en sorte que  $P_1$  contienne  $[c, b, a]$  et  $P_2, P_3$  soient vides.

## Exercice académique numéro 2

### *Langage codé*

Pour coder un message afin de le garder secret, on utilise la méthode de chiffrement suivante.

- On remplace chaque lettre du message par son rang  $x$  dans l'alphabet, allant de 0 pour A à 25 pour Z, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Les autres signes (virgules, espaces, points,...) sont supprimés.

- On calcule le reste  $y$  de la division euclidienne de  $7x + 5$  par 26.
- On remplace la lettre initiale  $x$  par celle ayant pour rang  $y$ .

*Cette technique de codage est appelée chiffrement affine.*

- 1) Vérifier, qu'en effectuant la division euclidienne de 89 par 26, on obtient 3 comme quotient et que le reste est 11.  
En déduire que, par cette méthode, la lettre M est codée par la lettre L.
- 2) Coder le mot MATHS.
- 3) On admet la propriété suivante que l'on pourra utiliser lorsque nécessaire dans toute la suite de l'exercice :  
**Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs et  $c$  un entier naturel non nul.**  
 **$a$  et  $b$  ont le même reste dans la division euclidienne par  $c$  si et seulement si  $a-b$  est un multiple de  $c$ .**

Montrer que, pour tout entier relatif  $k$ , si  $a$  et  $b$  ont le même reste dans la division euclidienne par  $c$  alors les entiers  $ka$  et  $kb$  ont le même reste dans la division euclidienne par  $c$ .

- 4) Soient  $x$  et  $y$  des entiers.
  - a) Montrer que si  $y$  et  $7x$  ont le même reste dans la division euclidienne par 26 alors  $15y$  et  $x$  ont le même reste dans la division euclidienne par 26.
  - b) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
- 5) Déduire alors que :  
 $y$  et  $7x + 5$  ont même reste dans la division euclidienne par 26 équivaut à  $x$  et  $15y + 3$  ont même reste dans la division euclidienne par 26.
- 6) A l'aide de la question précédente, décoder le mot ZERLGJFAHB.

*Déchiffrer un message codé par un chiffrement affine ne pose pas de difficulté. La cryptographie utilise des techniques bien plus complexes pour crypter des textes ou des données et en assurer l'inviolabilité.*