BESANÇON

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 (Série S)

Enoncé

Promenade parmi les nombres

On part du nombre 5 et on s'autorise à utiliser deux opérateurs :

- L'opérateur (M) « multiplier par 2 » : $n \longmapsto 2 \times n$
- L'opérateur (R) « retrancher 3 » : $n \longmapsto 3 \times n$.

Un entier naturel N est dit admissible s'il est possible, en partant de 5 et en n'utilisant que les deux opérateurs ci-dessus, de parvenir en un certain nombre d'étapes au nombre N.
Par exemple 25 est admissible par le chemin à cinq étapes :

$$5 \xrightarrow{\mathrm{M}} 10 \xrightarrow{\mathrm{R}} 7 \xrightarrow{\mathrm{M}} 14 \xrightarrow{\mathrm{M}} 28 \xrightarrow{\mathrm{R}} 25$$

On considérera par convention que 5 est admissible (chemin avec 0 étape)

1. Quels sont les entiers naturels admissibles en au plus 3 étapes ?
2. Montrer que 11, 13, 16 et 19 sont aussi admissibles.
3. Certains entiers naturels sont non admissibles : lesquels ? Justifier.
4. Montrer que 2 009 est admissible en présentant une méthode permettant de trouver le chemin menant de 5 à 2 009 (une telle méthode est aussi appelée *algorithme*).

Eléments de solution

1. Les six nombres admissibles en trois étapes sont :

le nombre 1 : $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{R} 1$
le nombre 8 : $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8$
le nombre 4 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{R} 4$
le nombre 14 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14$
le nombre 17 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{M} 20 \xrightarrow{R} 17$
le nombre 40 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{M} 20 \xrightarrow{M} 40$

Le raisonnement précédent laisse apparaitre aussi les nombres admissibles en 0 étapes (5), une étape (2 ; 10) et deux étapes (4 ; 7 ; 20).
Les onze nombres admissibles en moins de 4 étapes sont donc :

$$\boxed{1 - 2 - 4 - 5 - 7 - 8 - 10 - 14 - 17 - 20 - 40}$$

2. Les deux chemins suivants donnent la réponse :

$5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8 \xrightarrow{M} 16 \xrightarrow{R} 13$
$5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14 \xrightarrow{R} 11 \xrightarrow{M} 22 \xrightarrow{R} 19$

3. Les nombres divisibles par trois ne sont pas accessibles car :

- 5 n'est pas divisible par 3 ;
- en multipliant par 2 un nombre non divisible par 3, on obtient un nombre non divisible par 3 ;
- En retranchant 3 à un nombre non divisible par 3, on obtient un nombre non divisible par 3.

Ainsi, partant d'un nombre non divisible par 3, on ne trouvera sur son chemin (et donc au final) aucun nombre divisible par 3.

4. Un chemin menant de 5 à 2009 :

$5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8 \xrightarrow{M} 16 \xrightarrow{M} 32 \xrightarrow{M} 64 \xrightarrow{M} 128$
$\xrightarrow{M} 256 \xrightarrow{R} 253 \xrightarrow{M} 506 \xrightarrow{R} 503$
$\xrightarrow{M} 1006 \xrightarrow{M} 2012 \xrightarrow{R} 2009.$

Ce chemin a été trouvé par l'algorithme ci-dessous :

Algorithme de création de chemin :

On crée en fait le chemin inverse : en partant de N, on obtient un chemin qui mène à 5 de la manière suivante :

★ Si n est divisible par 2, son prédécesseur (père) est $n/2$.
L'opérateur est le réciproque de (M) : $n \xrightarrow{D} n/2$

★ Sinon, son prédécesseur est $n + 3$.
L'opérateur est le réciproque de (R) : $n \xrightarrow{A} n + 3$.

Ainsi, pour 2009, on obtient successivement :

$$\boxed{2009 - 2012 - 1006 - 503 - 506 - 253 - \ldots - 16 - 8 - 4 - 2 - 5.}$$

Complément 1 : justification de cet algorithme

Il est clair que le chemin inverse est bien constitué des seuls opérateurs autorisés (M) et (R).

On montre que l'ancêtre de degré 2 (le « grand père ») de n est $\dfrac{n}{4}$, $\dfrac{n+3}{2}$, ou $\dfrac{n}{2}+3$; on montre alors que tant que $n > 6$, il est strictement inférieur à n.
Ainsi la suite des grands-pères successifs décroît strictement, elle ne peut être

infinie en restant supérieure à 6 et donc on atteint à un instant donné pour la première fois une valeur strictement inférieure à 6.
On montre que la valeur précédente ne peut être que 8 ou 10.
Si c'est 8, on finit le trajet par $8 \xrightarrow{D} 4 \xrightarrow{D} 2 \xrightarrow{A} 5$
Si c'est 10, on finit le trajet par $10 \xrightarrow{D} 5$.
Ce qui montre que l'algorithme aboutit à 5 et donc le chemin inverse mène de 5 à N.

Complément 2 : caractère minimal de cet algorithme

L'algorithme précédent est original car :

★ Lorsque n est impair, on n'a pas d'autre choix que lui ajouter 3.

★ Lorsque $n = 2v$, n est pair, au lieu de le diviser par 2, on pourrait lui ajouter un certain nombre (q) de fois le nombre 3 puis seulement ensuite le diviser par 2 (ce qui doit nécessairement arriver pour décroître). Mais ceci impose que q soit pair pour pouvoir diviser par 2 ; ainsi $q = 2r$.

On arrive ainsi au nombre $\dfrac{2v+3q}{2} = \dfrac{2v+6r}{2} = v + 3r$.

Mais dans l'algorithme choisi on peut arriver à ce même nombre par une division par 2 et r ajouts de 3. Ce que résume le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
u = 2v \arrow[r, "D"] \arrow[d, "2r \text{ fois (A)}"] & v \arrow[d, "r \text{ fois (A)}"] \\
2v + 6r \arrow[r, "D"] & v + 3r
\end{tikzcd}$$

En notant

c_u le coût minimal pour aller de u à 5.

c le coût minimal pour aller de u à 5 en commençant par l'opérateur (D)

k le coût minimal pour aller de u à 5 en commençant par l'opérateur (A).

on aura : $c \leqslant 1 + r + c_{v+3r} \leqslant 1 + 2r + c_{v+3r} = k$
et donc $c \leqslant 1 + r + c_{v+3r} \leqslant 1 + 2r + c_{v+3r} = k$
et $[c = k] \Leftrightarrow [r = 0]$.
On a bien établi l'algorithme minimal.

Complément 3 : nombre minimal d'étapes

En notant pour N non divisible par 3 :

- $p = \min\left(\{k \in \mathbb{N}/2^k \geqslant N \text{ et } 3 \text{ divise } 2^k - N\}\right)$
- $b = \dfrac{2^p - N}{3}$
- c le nombre de chiffres en base 2 de b
- u le nombre de 1 dans l'écriture en base 2 de b.

pour $N \in \mathbb{N}^* - \{1,\ 4\}$ avec N non divisible par 3, la longueur du trajet minimal est

- $p + u - 4$ si $p - c = 2$
- $p + u$ si $p - c \neq 2$.

Exercice n° 2

Enoncé

Tableau des scores d'une poule de championnat

On s'intéresse aux tableaux de scores obtenus à l'issue d'une poule d'un championnat sportif.
Dans une telle poule, chaque équipe rencontre chacune des autres ;

✠ en cas de match nul on attribue 1 point à chaque équipe ;

✠ sinon on attribue 3 points à l'équipe gagnante et 0 point à l'équipe perdante.

Par exemple, si une poule comporte 3 équipes nommées A, B et C, on aura 3 matchs : A contre B, A contre C, B contre C. Si A perd ses deux matchs et que B gagne contre C, A totalisera 0 point, B 6 points et C 3 points. Le tableau de la poule sera dans ce cas le suivant :

1$^{\text{er}}$	B	6
2$^{\text{e}}$	C	3
3$^{\text{e}}$	A	0

Seule nous intéresse ici la troisième colonne ; nous la coderons $\boxed{630}$.
Attention, dans un tel code $\boxed{xyz}$, on aura toujours $x \geqslant y \geqslant z$.
Autre exemple : si les trois matchs donnent un résultat nul, le code obtenu sera $\boxed{222}$.

1. Dans cette question, la poule comporte 3 équipes. Combien de codes possibles obtient-on ? (on connaît déjà 630 et 222) Dans toute la suite, la poule comporte 4 équipes.
2. Si on sait qu'une équipe gagne tous ses matchs, combien de codes possibles peut-on obtenir ?
3. Si on sait que le premier du groupe a totalisé 4 points, combien de codes possibles peut-on obtenir ?

Eléments de solution

1. On obtient facilement 7 codes possibles : 630, 611, 440, 431, 421, 333 et 222.

2.a) En fait, le premier a 9 points. Le reste de la poule revient à effectuer