CAEN

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

Dans un certain pays, l'Etat emploie 3 millions de fonctionnaires dont les salaires mensuels, exprimés en euros, peuvent être classés ainsi :
[900 ; 1200[: 30%
[1200 ; 1600[: 50%
[1600 ; 3000[: 20%.
On peut de plus considérer que, dans chaque classe, la répartition est uniforme.

Le gouvernement envisage la mesure suivante : tous les salaires seront augmentés de 2%, mais une taxe de solidarité de 10% sera imposée sur la tranche du nouveau salaire dépassant un niveau p appelé plafond social. Le rapporteur du projet ne se souvient plus de la valeur exacte de p mais signale que seuls les salaires supérieurs, avant modification, à 1800 euros subiront une certaine baisse... solidarité oblige ! Il signale qu'un salaire de 1800 euros sera inchangé.

1°) Quelle est la valeur de p ?

2°) Si un salarié A gagne moins qu'un salarié B, est-il possible qu'après réforme, A gagne plus que B ?

3°) Si la mesure est appliquée, quel sera, à l'issue du premier mois, le bilan pour l'Etat ? (on pourra comparer la dépense occasionnée par l'augmentation des salaires et la recette correspondant au produit le la taxe de solidarité).

SOLUTION 1

1°) Soit s un salaire actuel, s_1 le salaire correspondant d'après l'augmentation et s' le salaire final.

$$\begin{cases} \text{si} \quad s_1 < p \quad s' = 1,02s \\ \text{si} \quad s_1 \geqslant p \quad s' = 1,02s - 0,1(1,02s - p) \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} \text{si} \quad s < \dfrac{p}{1,02} & s' = 1,02s \\ \text{si} \quad s \geqslant \dfrac{p}{1,02} & s' = 0,918s + 0,1p \end{cases}$

Soit $g = s' - s$ le gain algébrique à l'issue de la modification :

$$\begin{cases} \text{si} \quad s < \dfrac{p}{1,02} & g = 0,02s \\ \text{si} \quad s \geqslant \dfrac{p}{1,02} & g = -0,082s + 0,1p \end{cases}$$

Pour $s \geqslant \dfrac{p}{1,02}$, g est une fonction affine décroissante de s qui s'annule pour $s = 1800$, d'où $-0,082 + 0,1p = 0$, soit $p = 1476$ euros.

2°) Sur chacun des intervalles $\left[900\,; \dfrac{p}{1,02}\right[$ et $\left[\dfrac{p}{1,02}\,; 3000\right[$, s' est une fonction croissante de s ; si les salaires de A et B sont dans le même intervalle, l'ordre est conservé.

Si $s_A \in \left[900\,; \dfrac{p}{1,02}\right[$ et $s_B \in \left[\dfrac{p}{1,02}\,; 3000\right[$, alors $s'_A \leqslant p$ et $s'_B = 0,918 s_B +,1p$ d'où $s'_B \geqslant 0,918 \times \dfrac{p}{1,02} + 0,1p$ soit $s'_B \geqslant p$. Donc l'ordre est conservé.

Dans tous les cas, si $s_A < s_B$, alors $s'_A < s'_B$.

3°) Pour dresser le bilan, on examine le coût de l'augmentation puis le gain que rapporte la taxe :

a) Coût

Dans une classe d'effectif N, le total des salaires est $\sum s_i = N\overline{s}$ où $\overline{s}$ est le salaire moyen, mais la répartition étant régulière, $\overline{s}$ est le centre de la classe. Chaque salaire est multiplié par 1,02 donc le coût pour la classe est $\sum 0,02 s_i = 0,02N\overline{s}$.

L'augmentation est effectuée sur les salaires répartis comme l'indique le tableau donc le coût pour l'ensemble des fonctionnaires est :

$$0,02(9 \times 10^5 \times 1050 + 15 \times 10^5 \times 1400 + 6 \times 10^5 \times 2300)$$
$$= 88,5 \times 10^6 \text{ euros.}$$

b) Gain

La taxe s'applique sur les salaires déjà augmentés donc répartis ainsi :
$[918\,;1224[$: 30% $[1224\,;1632[$: 50% $[1632\,;3060]$: 20%
et elle ne rapporte à l'état que sur les classes $[1476\,;1632[$ et $[1632\,;3060]$.

Sur chaque salaire s_1, est prélevé $0,1(s_i - 1476)$ donc une classe d'effectif N rapporte à l'état $0,1N(\overline{s} - 1476)$.

Pour la classe $[1476\,;1632[$, $\overline{s} = \frac{1}{2}(1476 + 1632) = 1554$ et, compte tenu de la répartition uniforme, $\frac{N}{1632 - 1476} = \frac{1,5 \times 10^6}{1632 - 1224}$
d'où $N = \frac{1,5 \times 10^6 \times 156}{408} \approx 5,73 \times 10^5$

Pour la classe $[1632\,;3060]$, $\overline{s} = 2346$ et $N = 6 \times 10^5$. D'où le produit de la taxe :

$$0,1[5,73(1554 - 1476) + 6(2346 - 1476)] \times 10^5 \approx 56,67 \times 10^6 \text{ euros}$$

Le produit de la taxe couvre environ 64% de la dépense.

SOLUTION 2

1°) Celui qui gagnait 1800 gagnera, après l'augmentation : $1,02 \times 1800 = 1836 = p + t$ (t : partie taxable), et après la taxe : $1836 - (0,10 \times t) = 1800$ par hypothèse, d'où $t = 360$ et $p = 1476$.

2°) Non car chacune des deux opérations (augmentation de 2% et taxe de 10%) est une fonction croissante - la seconde transforme $p + t$ en $p + (0,9 \times t)$-, leur composée est nécessairement croissante.

3°) Si $N = 3\,000\,000$ est le nombre de fonctionnaires, l'Etat paye avant l'augmentation : $(1050 \times 0,30N) + (1400 \times 0,50N) + (2300 \times 0,20N) = 1475N$. L'augmentation de 2% augmente cette dépense de $29,5N$. Après cette première augmentation, ceux de la troisième tranche auront des salaires équirépartis entre 1632 et 3060, dont la partie taxée sera en moyenne de $((1632 + 3060)/2) - p = 870$, sur lesquels on pérélèvera $(10\% \times 870) \times 0,20N = 17,4N$.
Ceux de la deuxième tranche auront des salaires équirépartis entre 1224 et 1632, il y en aura $((1632 - p)/(1632 - 12242)) \times 0,50N$ qui dépasseront le plafond social d'un montant moyen de $(1632 - p)/2 = 78$, la taxe prélèvera donc : $(10\% \times 78) \times (156/408) \times 0,50N = 1,491176\ldots N$.

Au total, la taxe prélèvera $18,89\ldots N$ des $29,5N$ d'augmentation, l'ensemble coûtera $10,61N$ à l'Etat, ce qui équivaut à une augmentation moyenne de 0,719%.

SOLUTION 3 (par Eric Trotoux)

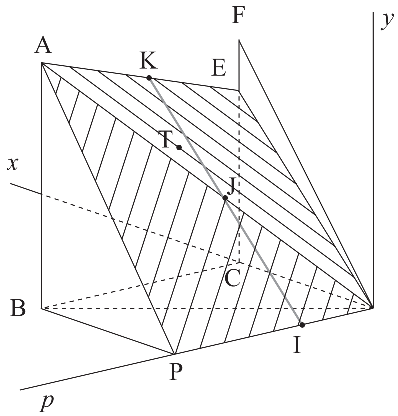
Un exercice dont la difficulté réside dans la compréhension d'une modélisation de politique budgétaire. Les notions de statistique descriptives de seconde sont à l'œuvre dans la dernière question.

Préambule - Notation : La variable salaire initial est désignée par x. Le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation de 2% est noté a ($a = 1,02$). p représente le plafond social indiqué par l'énoncé et y la variable salaire final. Donnons l'expression de y en fonction de x. Lorsque ax est inférieur à p, le nouveau salaire y vérifie $y = ax$ (pas de taxe dans ce cas). Lorsque ax est supérieur à p, le nouoveau salaire y vérifie $y = ax - 0,1 \times (ax - p) = 0,9ax + 0,1p$ (taxation de 10% sur l'excès $ax - p$).
La mesure gouvernementale se traduit par l'application d'une fonction que l'on note m définie par

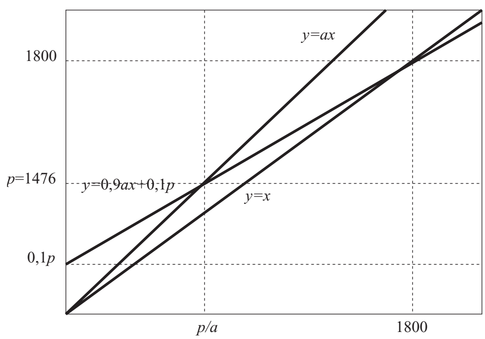
$$m(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad x \leqslant \dfrac{p}{a} \\ \\ 0,98ax + 0,1p & \text{si} \quad x > \dfrac{p}{a} \end{cases}$$

Question 1 - *Vision 3D* - En donnan t le statut de variable au paramètre p, on peut envisager une représentation 3D dans un repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où x, p, y sont respectivement abscisse, ordonnée et cote. La traduction des données nous conduit à considérer la surface constituée de deux portions triangulaires de plans ; T_1 et T_2 définies par $y = ax$ dans la région telle aue $0 \leqslant x \leqslant 3000$, $0 \leqslant p \leqslant 3600$ et $ax \leqslant p$ d'une part, et $y = 0,9ax + 0,1p$ dans la région telle que $0 \leqslant x \leqslant 3000$, $0 \leqslant p \leqslant 3600$ et $p \leqslant ax$ d'autre part. Ces deux triangles ont un côté commun porté par la droite $\Delta : \begin{cases} y = ax \\ p = ax \end{cases}$. Pour x et p fixé, on lit la valeur de y corresppondante comme la cote du point de cette surface d'abscisse x et d'ordonnée p. La condition imposée par le texte signifie que le point T $(1800, p_0, 1800)$ est situé sur l'un des triangles précédents. Comme sur T_1, on a $y = ax$ avec $a \neq 1$, ce point est sur T_2 et vérifie

$1800 = 0,9a \times 1800 + 0,1p_0$. On en déduit que $p_0 = 1476$ (nous vérifions que $1476 \leqslant 1800a$).
L'intersection d'un plan d'équation $p = c$ où c est fixé, avec $T_1 \cup T_2$ est constituée de deux segments qui permettent de suivre les variations de y suivant x.



Question 1 - On peut aussi représenter nos données en "2D" avec p paramètre réel fixé. On dote D_a la droite d'équation $y = ax$ dans un repère $(\mathrm{O}\,; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et D_p la droite d'équation $y = 0,9ax + 0,1p$. La représentation graphique C_m de la fonction m est portée par ces droites et une comparaison grtaphique avec la droite d'équation $y = x$ traduit clairement l'effet de la mesure sur les salaires. Pour satisfaire la condition imposée par le texte, il suffit de trouver p tel que le point (1800, 1800) soit sur C_m. La résolution de l'équation $m(1800) = 1800$ par rapport à p donne $p = p_0 = 1476$ (voir la figure suivante).



Question 2 - Comme les restrictions de m à $[900,\ p/a]$ et $[p/a,\ 3000]$ sont deux fonctions affines strictement croissantes, leur recollement an

p/a sur [900, 3000] fournit une fonction strictement croissante sur [900, 3000]. Ainsi $x_A \leqslant x_B$ entraîne $y_A \leqslant y_B$.

Question 3 - La fonction m_0 correspondant à p_0 réalise une bijection strictement croissante de [900, 3000] sur $[m_0(900), m_0(3000)]$. Les salaires modifiés se répartissent sur cet intervalle, à savoir [918 ; 2901,6]. Notons X la série des salaires initiaux et Y celle des salaires nets finaux. Soient deux réels c_1 et c_2 tels que $918 \leqslant c_1 < c_2 \leqslant 2901,6$. Puisque $Y = m_0(X)$, nous avons alors, avec des notations classiques, $\text{card}(c_1 \leqslant Y < c_2) = \text{card}(m_0^{-1}(c_1) \leqslant X < m_0^{-1}(c_2))$. Il reste à fixer les éléments c_i, $i = 1,2$ de telle sorte que $\text{card}(m_0^{-1}(c_1) \leqslant X < m_0^{-1}(c_2))$ soit déterminable par les données initiales. Pour obtenir la moyenne d'une classe $[c_1, c_2]$ par $\dfrac{c_1 + c_2}{2}$, nous choisirons des classes où la répartition est uniforme. Pour cela, nous partageons la classe $[m_0(1200), m_0(1600)]$ à $p_0 = 1476$ qui est la valeur frontière (les restrictions de m_0^{-1} aux deux sous-intervalles $[m_0(1200), 1476]$ et $[1476, m_0(1600)]$ sont affines - $m_0^{-1}(1476) = 1447$). Résumons dans un tableau où N est le nombre des fonctionnaires :

k	Bornes de X	Bornes de Y	Effectifs	Centres X	Centres Y
1	900	918	0		
2	1200	1224	0,3×N	1050	1071
3	1447	1476	$0,5N \times \frac{247}{400}$	1323,5	1350
4	S1600	1616,4	$0,5N \times \frac{153}{400}$	1523,5	1546,2
5	3000	2901,6	0,2N	2300	2259

Calculons le bilan de cett mesure :
Salaire moyen net initial : $\overline{X} = 0,3 \times 1050 + 0,5 \times 1400 + 0,2 \times 2300 = 1475$.
Salaire moyen net final : $\overline{Y} = 0,3 \times 1071 + 0,5 \times \dfrac{247}{400} \times 1350 + 0,5 \times \dfrac{153}{400} \times 1546,2 + 0,2 \times 2259 = 1485,62$
L'Etat doit donc financer cette mesure à la heuteur de $\overline{Y} - \overline{X}) \times N$ euros, c'est-à-dire $3 \times 10,62 \times 10^6$, soit un coût de 31.8 millions d'euros. La majoration de 2% des salaires initiaux correspond à un débours de $0,02 \times 1475 \times 3 \times 10^6 = 88,5$ millions d'euros. La taxe rapporte donc $88,5 - 31,8 = 56,6$ millions d'euros.

Prolongements possibles - La première question qui vient à l'esprit est : « Peut-on choisir p et comment, pour que la mesure budgétaire soit indolore pour les finances de l'Etat ? » Réponse : après résolution d'une

équation trinôme en p, il vient la solution $p_1 = 1270,77$ euros. Dans ce cas, les salaires supérieurs à 1549,7 euros subissent une diminutiion et cela concerne 26,4% des fonctionnaires (contre 17,4% dans la situation de l'exercice).
La deuxième question est : « Y a-t-il une autre politique envisageable ? »
On peut proposer une fonction m non affine par morceaux, mais dérivable et concave comme $m(x) = 1800 \times \left(\frac{x}{1800}\right)^{\alpha}$ où $\alpha \in]0,1[$. Celle-ci agit de façon analogue à la fonction de l'exercice, mais la répartition des nouveaux salaires n'est plus uniforme par intervalles. Ici, le calcul du bilan nécessite une intégration : $\int_{S_{min}}^{S_{max}} (m(x)-x)f(x)dx$ où $f(x)$ décrit la densité de fréquence des salaires initiaux sur $[S_{min}, S_{max}]$. Par exemple, ave $\alpha = 0,9$, on trouve pour la répartition de l'exercice $B = 23,1$ millions d'euros.

COMMENTAIRES

1. De l'équipe académique :
« La situation proposée a été souvent mal appréhendée, la notion de tranche dépassant un seuil et seule affectée par une taxe n'a pas été comprise.
En revanche, les notions de moyenne d'une classe, d'utilisation de cette moyenne dans les calculs, et de répartition uniforme dans la classe, sont souvent bien assimilées. »

2. De Michel REGNAULT, correcteur :
A partir d'un tableau statistique et en restant à un niveau élémentaire, que peut-on faire après avoir calculé ou plutôt après avoir lu sur l'écran d'une calculatrice, les valeurs de quelques paramètres de la série correspondante ? Une possibilité est de le faire évoluer en prenant l'image de la série par une fonction. Si cette fonction est affine, on sait comment sont transformés moyenne et écart-type, d'où la classique recherche de péréquations, mais on peut aussi faire agir une fonction affine par intervalles...

L'analyse de la première question est souvent incorrecte car beaucoup raisonnent ainsi : un salaire de 1800 euros est inchangé, donc la hausse de 2% sur 1800 est compensée par la baisse de 10% sur $1800 - p$, mais c'est oublier que l'écart avec p est calculé sur le salaire déjà augmenté.

Le but de la deuxième question est d'examiner si cette baisse, effectuée sur les salaires à partir d'un certain niveau, crée ou non un effet de seuil. Parmi les justifications trouvées, peu sont suffisantes, car la liaison entre le nouveau salaire et l'ancien n'est pas clairement explicitée sous forme d'une fonction affine par intervalles.

Pour finir, l'hypothèse de répartition uniforme, permettant de ramener chaque classe à son centre, est, en général, bien comprise et il n'est donc pas rare de trouver un calcul correct de la dépense occasionnée par l'augmentation, mais il en est tout autrement pour celui de la recette procurée par la taxe !

3. De François LO JACOMO

Cet exercice « qui rappelle (N.D.L.R. : pour les adultes imposables !) tous les calculs pénibles d'impôts, a une application concrète mais s'éloigne des mathématiques pures. Comme, d'ailleurs, dans l'autre exercice académique, la difficulté n'est pas tant dans le raisonnement que dans la traduction, sans erreur de calcul, d'une réalité concrète en expression mathématique. La réponse à la deuxième question du premier (A gagne plus que B) devrait être évidente sans calcul, il serait intéressant de voir combien de candidats disposent d'une telle intuition. »

4. De l'équipe « brochure »

L'exercice est intéressant... et apprend à être attentif aux énoncés ! L'usage d'une calculatrice pouvait faciliter essais et **contrôles**.
De plus, hors épreuve, l'exercice peut susciter d'intéressantes discussions !