# CAEN

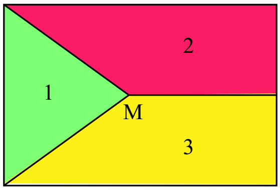
## Exercice n$^{o}$ 1 (Série S)

### Enoncé

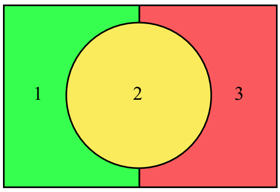
#### Les drapeaux

On considère pour chaque question un drapeau de dimenseions 120 × 80 cm.

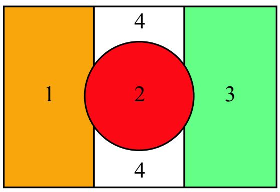
**1.** Un nouveau pays veut créer son drapeau (ci-contre). Ses dirigeants souhaitent que les trois « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par trois parties de même aire.
Quelle(s) est (sont) la (les) position(s) possible(s) du point M, point commun aux trois parties, pour que le côté commun aux parties 2 et 3 soit parallèle aux deux autres côtés ?




**2.** Un autre nouveau pays veut aussi créer son drapeau (ci-contre). Ses dirigeants souhaitent aussi que les trois « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par trois parties de même aire.
Peut-on avoir les 3 aires égales ?




**3.** Un troisième nouveau pays veut créer aussi son drapeau (ci-contre). Ses dirigeants souhaitent que les quatre « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par quatre parties de même aire.

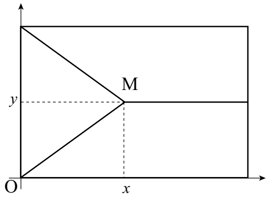



1. Peut-on avoir les 4 aires égales si les trois bandes verticales sont de même largeur ?
2. Peut-on avoir les 4 aires égales si l'on fait varier la largeur de la bande centrale ?

   Indication : on pourra utiliser le fait que l'aire d'un secteur angulaire de $\alpha$ radian est égale à $\dfrac{\alpha}{2} \times r^2$.

# Eléments de solution

1- Considérons un repère orthonormé d'origine O, dans lequel M aura pour coordonnées $(x\ ,\ y)$.
Soient $A_1$, $A_2$ et $A_3$ les aires respectives des parties 1, 2 et 3.




$A_1 = 40x$ ;
$A_2 = \dfrac{(120 + 120 - x) \times (80 - y)}{2}$ ;
$A_3 = \dfrac{120 + 120 - x) \times y}{2}$.
De $A_2 = A_3$, il résulte que $80 - y = 40$ d'où $y = 40$.
De $A_1 = A_3$, il résulte que $2x = 240 - x$ d'où $x = 80$.
Le point M est unique et a pour coordonnées $(80\ ,\ 40)$ dans le repère ci-dessus.

2- Soient $A_1$, $A_2$ et $A_3$ les aires respectives des parties 1, 2 et 3.
Puisque les trois parties ont la même aire :

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{80 \times 120}{3} = 3\ 200\ \text{cm}^2.$$

Donc le disque est bien contenu dans le drapeau. Quant aux parties 1 et 3, leur aire est bien $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$ de l'aire du drapeau.

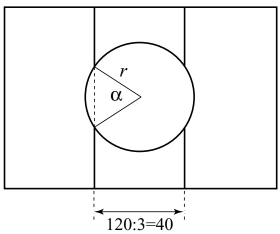
3- a) Soient Soient $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ les aires respectives des parties 1, 2, 3 et 4.
Puisque les quatre parties ont la même aire :

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \frac{80 \times 120}{4} = 2\ 400\ \text{cm}^2.$$

En particulier $A_2 = \pi\ r^2 = 2\ 400$ où $r$ est le rayon du disque central, donc :

$$r = \sqrt{\frac{2400}{\pi}} = 20\sqrt{\frac{6}{\pi}} \approx 27,6 < \frac{80}{2}$$

Ce qui convient.
Calcul de $A_1$ :
On calcule d'abord l'aire $B$ de l'intersection du disque et de la bande verticale de gauche.




$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \cos^2\left(\dfrac{20}{r}\right)$
d'où $\alpha = 2\cos^{-1}\left(\dfrac{20}{r}\right) = 2\cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\right)$.

$$B = \frac{\alpha}{2}r^2 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times r^2 = \frac{\alpha}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2\ \sin\alpha = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$$

Donc
$A_1 = 40 \times 80 - \dfrac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$

$$= 3200 - \frac{1200}{\pi}\left(2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) - \sin\left(2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)\right)\right)$$
$$\approx 3000 \text{ cm}^2 \neq 2400 \text{ cm}^2 \text{ donc la réponse est NON.}$$

3- b) Il résulte du calcul précédent que les deux bandes 1 et 3 sont trop larges si l'on choisit une largeur $\ell$ de la bande centrale supérieure à 40.
Les quatre aires $(120-\ell)\times 40$, $\pi r^2$, $(120-\ell)\times 40$ et $\ell \times 80 - \pi r^2$ sont égales à 2400 si $\ell = 60$ et $\pi r^2 = 2400$.

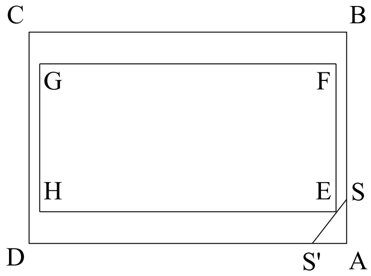
# Exercice n° 2 (Série S)

## Enoncé

### Problème du cadre

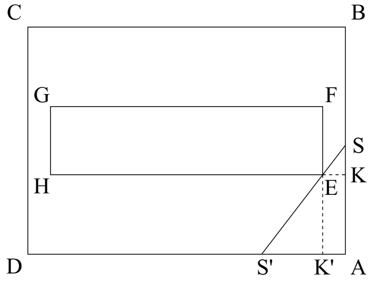
On dispose d'un cadre dont le bord extérieur est un rectangle ABCD de dimensions 30 cm et 20 cm. Le bord intérieur est aussi un rectangle EFGH.
Les deux bandes du cadre suivant les longueurs sont identiques. Il en est de même des bandes suivant les largeurs.
La bande suivant la largeur est large de 1 cm. La bande suivant les longueurs est large de 3 cm.
On veut découper le coin A de ce cadre suivant la section [SS′].

1. Déterminer la longueur SS′ de la section sachant que AS = AS′.
2. Calculer la longueur de la section SS′ lorsque S est en B.
3. Même question lorsque S′ est en D.
4. Calculer la longueur de la section lorsque ES = ES′.




## Eléments de solution

1. *Déterminer la longueur $SS'$ de la section sachant que $AS = AS'$.*
Si $AS = AS'$, alors le triangle est isocèle rectangle en A.
Soit K le point d'intersection de (AB) et (EH). Alors $SK = EK = 1$ cm.
Soit K' le point d'intersection de (AD) et (EF). Alors $SK' = EK' = \sqrt{3}$ cm.




Ainsi

$$SS' = \sqrt{AS^2 + AS'^2} = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} \approx 3,86 \text{ cm}$$