Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Problème du cadre

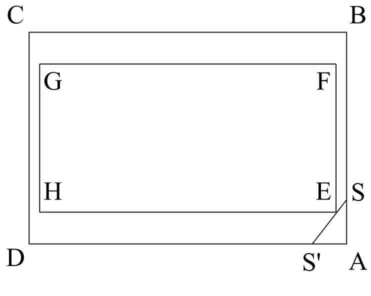
On dispose d'un cadre dont le bord extérieur est un rectangle ABCD de dimensions 30 cm et 20 cm. Le bord intérieur est aussi un rectangle EFGH.

Les deux bandes du cadre suivant les longueurs sont identiques. Il en est de même des bandes suivant les largeurs.

La bande suivant la largeur est large de 1 cm. La bande suivant les longueurs est large de 3 cm.

On veut découper le coin A de ce cadre suivant la section [SS′].

1. Déterminer la longueur SS′ de la section sachant que AS = AS′.
2. Calculer la longueur de la section SS′ lorsque S est en B.
3. Même question lorsque S′ est en D.
4. Calculer la longueur de la section lorsque ES = ES′.



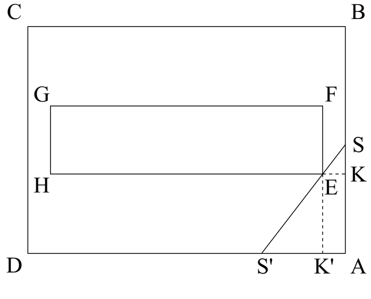
Eléments de solution

1. *Déterminer la longueur SS' de la section sachant que $AS = AS'$.*

Si $AS = AS'$, alors le triangle est isocèle rectangle en A.

Soit K le point d'intersection de (AB) et (EH). Alors $SK = EK = 1$ cm.

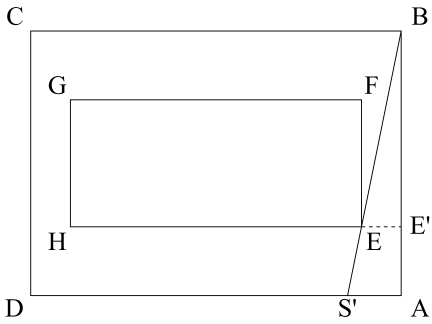
Soit K' le point d'intersection de (AD) et (EF). Alors $SK' = EK' = \sqrt{3}$ cm.



Ainsi

$$SS' = \sqrt{AS^2 + AS'^2} = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} \approx 3,86 \text{ cm}$$

2. *Calculer la longueur de la section* SS' *lorsque* S *est en* B.



Soit E' le point d'intersection de (HE) et (AB). On a

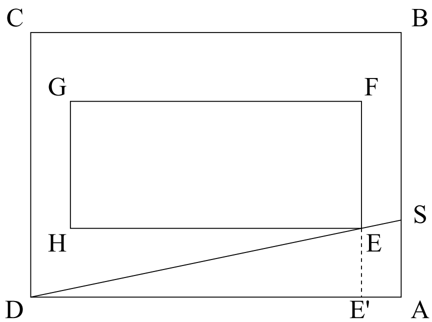
$\tan \widehat{EBE'} = \dfrac{EE'}{BE'} = \dfrac{1}{20-\sqrt{3}} = \dfrac{AS'}{AB} = \dfrac{AS'}{20}$.

Alors $AS' = \dfrac{20}{20-\sqrt{3}}$.

Le théorème de Pythagore donne ensuite :

$$SS' = BS' = \sqrt{20^2 + \left(\frac{20}{20-\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{161600 - 16000\sqrt{3}}}{20-\sqrt{3}} = 20 \text{ cm.}$$

3. *Même question lorsque* S' *est en* D.



Soit E' le point d'intersection de (FE) et (AD). On a :

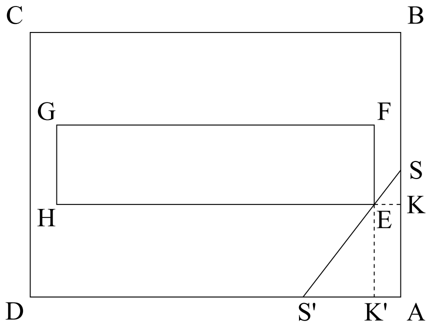
$\tan \widehat{EDE'} = \dfrac{EE'}{DE'} = \dfrac{\sqrt{3}}{30-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{29} = \dfrac{AS}{AD} = \dfrac{AS}{30}$

Alors $AS = \dfrac{30\sqrt{3}}{29}$.

Le théorème de Pythagore donne ensuite :

$$SS' = DS = \sqrt{30^2 + \left(\frac{30\sqrt{3}}{19}\right)^2} = \sqrt{\frac{327600}{361}} \approx 30,12 \text{ cm.}$$

4. *Calculer la longueur de la section lorsque $ES = ES'$.*
Soit K le point d'intersection de (AB) et (EH) et K' le point d'intersection de (AD) et (EF). On note $\theta = \widehat{ESK}$.



On a $\sin \widehat{ESK} = \sin \theta = \dfrac{EK}{SE} = \dfrac{1}{SE}$, alors $SE = \dfrac{1}{\sin \theta}$.

De même $\sin \widehat{ES'K'} = \sin \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \dfrac{EK'}{ES'} = \dfrac{\sqrt{3}}{ES'}$, alors $ES' = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos \theta}$.
Si $ES = ES'$, alors

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta} \text{ et donc } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ alors } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi : $SS' = 2SE = \dfrac{2}{\sin \theta} = 4$ cm.