ACADÉMIE DE CORSE

ÉNONCÉ

Considérons le nombre de quatre chiffres 5113 ; en inversant les chiffres on obtient 3115. La différence de ces deux nombres est 5113 – 3115 = 1998 ... année du millénaire précédent.

Pour l'actuel millénaire on peut trouver 5112 – 2115 = 2997 ... c'est dans 996 ans.

1. Démontrer que 2000 et 2001 ne peuvent pas s'écrire comme la différence d'un nombre de quatre chiffres et du nombre obtenu en inversant les chiffres.

2. Quelles sont les années de ce millénaire qui sont la différence d'un nombre de quatre chiffres et du nombre obtenu en inversant les chiffres ?

SOLUTION 1

1. Si $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 2000$

alors $1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = 2000$

et $d = a$ d'où $90(b - c) = 2000$, ce qui est impossible puisque 2000 n'est pas multiple de 9.

Si $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 2001$ alors $a > d$ soit $d = 0$ et $a = 9$.

$1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = 2001$

soit $999(a - d) + 90(b - c) = 2001$

comme $d = 0$ et $a = 9$

$8991 + 90(b - c) = 2001$ soit $90(b - c) = -6990$ soit $9(b - c) = -699$

or 699 n'est pas divisible par 9.

2. Posons $\overline{abcd} - \overline{dcba} = \overline{2xyz}$ soit :

$1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a) = 2000 + 100x + 10y + z$

$\Rightarrow \quad 999(a - d) + 90(b - c) = 2000 + 100x + 10y + z.$

On a donc $a > d$ et, en observant les unités, $10 + d - a = z$,

donc $a - d = 10 - z$.

Au niveau des dizaines, soit $c \geqslant b + 1$, soit $c < b + 1$.

a) Si $c \geqslant b + 1$ alors $c - b - 1 = y$ (qui impose $y \leqslant 8$ car $b - c \leqslant 9$)

Ainsi : $999(10 - z) + 90(-1 - y) = 2000 + 100x + 10y + z$

$\Rightarrow \quad 7900 = 100x + 100y + 1000z \quad \Rightarrow \quad 10z + x + y = 79$

• Si $x + y > 9 \quad 10(x + 1) + (x + y - 10) = 70 + 9$

donc $x + y - 10 = 9$ et $z + 1 = 7$.

Soit $x + y = 19$, ce qui est impossible.

• Si $x + y \leqslant 9$ alors $z = 7$ et $x + y = 9$ avec $y \leqslant 8$ soit $x \leqslant 1$.
Cela donne nécessairement 9 possibilités :
2187, 2277, 2367, 2457, 2547, 2637, 2727, 2817, 2907.

b) Si $c < b + 1$ alors $10 + c - b - 1 = y$ et donc $b - c = 9 - y$
Ainsi, $999(10 - z) + 90(9 - y) = 2000 + 100x + 10y + z$
$\Rightarrow \quad 8800 = 1000z + 100y + 100x \quad \Rightarrow \quad 88 = 10z + x + y$.

• Si $x + y \leqslant 9$ alors $z = 8$ et $x + y = 8$
Cela donne 9 possibilités :
2088, 2178, 2268, 2358, 2448, 2538, 2628, 2718, 2808.

• Si $x + y > 9$ alors $88 = 10(z + 1) + (x + y - 10)$
donc $z = 7$ et $z + 1 = 18$. Cela impose $x = y = 9$ et $z = 7$
et donne uniquement : 2997.

Conclusion : les années cherchées sont nécessairement parmi les 19 possibilités :
2187, 2277, 2367, 2457, 2547, 2637, 2727, 2817, 2907, 2088, 2178, 2268, 2358, 2448, 2538, 2628, 2718, 2808, 2997.

Réciproquement :

Pour les 9 premiers cas, utilisons : $a - d = 10 - z = 3$ et $c - b = y + 1$.
2187 = 4091 – 1904 = 5092 – 2905 = 6093 – 3609 = ...
2277 = 4081 – 1804 = ... 2367 = 4071 – 1704 = ...
2457 = 4061 – 1604 = ... 2547 = 4051 – 1504 = ...
2637 = 4041 – 1404 = ... 2727 = 4031 – 1304 = ...
2817 = 4021 – 1204 = ...
2907 = 4011 – 1104 = ...

Pour les 9 suivants, utilisons : $a - d = 10 - z = 2$ et $b - c = 9 - y = 1 + x$.
2088 = 3101 – 1013 = 4102 – 2014 = 5103 – 3015 = ...
2178 = 3201 – 1023 = ... 2268 = 3301 – 1033 = ...
2358 = 3401 – 1043 = ... 2448 = 3501 – 1053 = ...
2538 = 3601 – 1063 = ... 2628 = 3701 – 1073 = ...
2718 = 3801 – 1083 = ... 2808 = 3901 – 1093 = ...

Pour le dernier, $a - d = 3$ et $b - c = 0$.
2997 = 4001 – 1004 = 5002 – 2005 = ...

SOLUTION 2

Posons $\overline{abcd} - \overline{dcba} = \overline{2xyz}$, ainsi :

$$2001 \leqslant 999(a-d) + 90(b-c) \leqslant 2999.$$

Or $a > d$ donc $1 \leqslant a - d \leqslant 9$.

De plus $-9 \leqslant b - c \leqslant 9$ d'où

$$999(a-d) - 9 \times 90 \leqslant 999(a-d) + 90(b-c) \leqslant 999(a-d) + 909$$

$$2001 \leqslant 999(a-d) + 90(b-c) \leqslant 999(a-d) + 90 \times 9$$

donc : $2001 \leqslant 999(a-d) + 810$

donc nécessairement $1 < \dfrac{1191}{999} \leqslant a - d$.

De même $999(a-d) - 9 \times 90 \leqslant 2999$ donc $a - d \leqslant 3809/999 < 4$

Donc nécessairement $a - d = 2$ ou $a - d = 3$.

1. Si $a - d = 2$:

$$2001 \leqslant 999 \times 2 + 90(b-c) \leqslant 2999$$

soit $2001 - 1998 \leqslant 90(b-c) \leqslant 2999 - 1988$

d'où $\dfrac{3}{90} \leqslant b - c \leqslant \dfrac{1002}{90}$, soit $1 \leqslant b - c \leqslant 9$.

Il y a donc 9 résultats possibles.

Par exemple : $a = 2$, $d = 0$, $b = 2$ et $c = 1$ donnent : $2210 - 0122 = 2088$ etc.

2. Si $a - d = 3$:

$$2001 \leqslant 999 \times 3 + 90(b-c) \leqslant 2999$$

soit $2001 - 2997 \leqslant 90(b-c) \leqslant 2999 - 2997$

d'où $-9 \leqslant b - c \leqslant 0$.

Il y a donc 10 résultats possibles.

Il reste à vérifier si les 19 nombres obtenus conviennent.