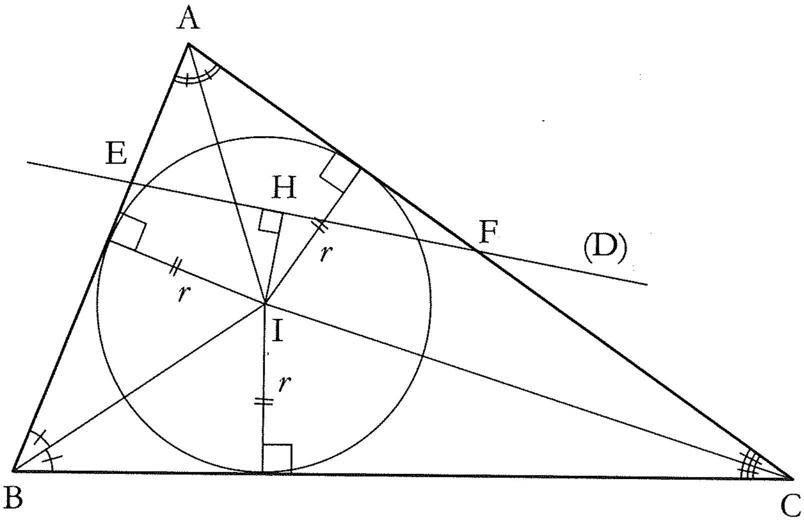
ACADÉMIE DE LA GUADELOUPE

Démontrer qu'une droite, divisant un triangle en deux polygones de même aire et de même périmètre, passe par le centre du cercle inscrit au triangle.

Solutions.

Méthode 1 – « officielle » - par Thierry de PERETTI

Elle est fondée sur une intervention immédiate de I, centre du cercle inscrit, donc équidistant des côtés, grâce à une expression des aires à partir de triangles de même sommet I et des hauteurs issues de I. Cette méthode fait intervenir immédiatement, à la fois le point I, la condition des aires égales, celle des périmètres égaux.



La droite (D) coupe le triangle ABC, suivant le triangle AEF et le quadrilatère EFCB.
I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, et r est son rayon.
H est le projeté orthogonal de I sur la droite (D).

Supposons I extérieur au triangle AEF.

D'une part :
Aire (AEF) = Aire (AEIF) – Aire (EIF)

Or $\text{Aire}(\text{AEIF}) = \text{Aire}(\text{AEI}) + \text{Aire}(\text{AIF})$

$$= \frac{r}{2} \times \text{AE} + \frac{r}{2} \times \text{AF} = \frac{r}{2} \times (\text{AE} + \text{AF})$$

et $\text{Aire}(\text{EIF}) = \frac{1}{2} \times (\text{EF} \times \text{IH})$.

D'où : $$\boxed{\text{Aire}(\text{AEF}) = \frac{r}{2} \times (\text{AE+AF}) - \frac{1}{2}(\text{EF} \times \text{IH})}$$

D'autre part :
Aire (BEFC) = Aire (BEI) + Aire (IFC) + Aire (BIC) + Aire (EIF)

$$\text{Aire}(\text{BECF}) = \frac{r}{2} \times \text{BE} + \frac{\text{r}}{2} \times \text{FC} + \frac{\text{r}}{2} \times \text{CB} + \frac{1}{2} \times (\text{EF} \times \text{IH})$$

$$\boxed{\text{Aire}(\text{BEFC}) = \frac{r}{2} \times (\text{BE+FC+CB}) + \frac{1}{2} \times (\text{EF} \times \text{IH})}$$

Dire que AEF et BEFC ont même aire, revient à dire que :

$$\frac{r}{2} \times (\text{AE+AF}) - \frac{1}{2} \times (\text{EF} \times \text{IH}) = \frac{r}{2} \times (\text{BE+FC+CB}) + \frac{1}{2} \times (\text{EF} \times \text{IH})$$

$$\text{EF} \times \text{IH} = \frac{\text{r}}{2} \times (\text{BE+FC+CB - AE - AF})$$

$$\boxed{\text{EF} \times \text{IH} = \frac{\text{r}}{2} \times \left[\text{Périmètre}(\text{BEFC}) - \text{Périmètre}(\text{AEF})\right]}$$

Si AEF et BEFC ont même périmètre et même aire, on a EF × IH = 0, et comme EF est différent de 0, il vient IH = 0 et le point I appartient à la droite (D).

Remarques **:**

1- Même démonstration, si I est de l'autre côté de la droite (D).

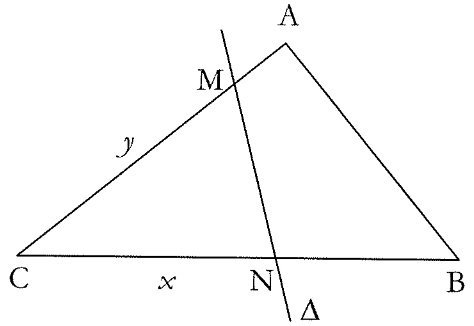
2- Chacune des trois conditions : IH = zéro, égalité des aires, égalité des périmètres, est entraînée par les deux autres prises ensemble – sous réserve de l'existence d'une droite répondant aux conditions considérées.

Méthodes 2 ; 3 ; 4

Supposons qu'il existe une droite (Δ) répondant aux deux conditions imposées .

Soit [BC] et [AC] les côtés coupés par Δ, en N et M respectivement, avec CN = x et CM = y (nous aurons $xy \neq 0$).

- Nous désignons les aires par des parenthèses -



L'égalité des aires MNC et ABNM $\Leftrightarrow (\text{MNC}) = \frac{1}{2}(\text{ABC}) \Leftrightarrow \boxed{xy = \frac{1}{2}ab}$

L'égalité des périmètres de MNC et ABMN

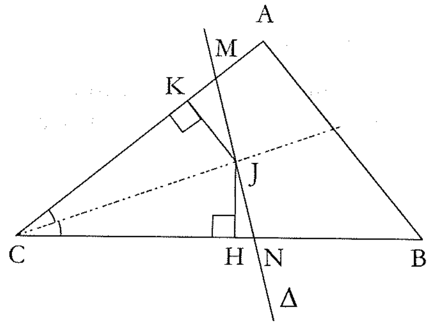
$\Leftrightarrow \quad x + y = (a - x) + (b - y) + c$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x + y = p}$ (avec $a + b + c = 2p$).

Donc (Δ) remplit les conditions imposées si et seulement si $x + y = p$ et $xy = \frac{ab}{2}$.

A partir de cette base commune, voici les méthodes 2 ; 3 ; 4.

Méthode 2 (due à Jacques DABLANC)(Jean BICHARA et Serge PARAY ont fourni des solutions analogues)



(Δ) coupe la bissectrice intérieure de $\widehat{C}$. Soit J leur point commun.

JH = JK (= ρ)

Aire(ABC) = pr.

[*Démonstration* : I étant le centre du cercle inscrit,

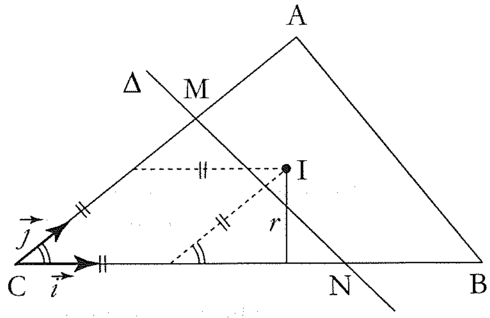
Aire(ABC) = aire(IBC) + aire(IAB) + aire (IAC) = $\frac{1}{2}r(a+b+c) = pr$]

Donc $\quad \text{aire(CMN)} = \dfrac{1}{2}\,\text{aire(ABC)} = \dfrac{pr}{2}$.

D'autre part, $\quad$
$$\begin{aligned}\text{aire(CMN)} &= \text{aire(JCN)} + \text{aire(JCM)}\\ &= \frac{1}{2}\rho x + \frac{1}{2}\rho y\\ &= \frac{1}{2}\rho(x+y)\\ &= \frac{\rho p}{2}\end{aligned}$$

Donc $\quad pr = \rho p, \qquad$ i.e. $\qquad \rho = r$.
J = I. La droite (Δ) passe par I.

Méthode 3 (due à Raymond RAYNAUD) (Alain MAGEN a fourni une solution analogue).



Repère normé $\left(C,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Avec CN = x et CM = y, une équation de Δ est (avec X et Y coordonnées d'un « point courant » de Δ) :

$xY + yX - xy = 0 \qquad (1)$

Les coordonnées de I sont :

$$\alpha = \beta = \frac{r}{\sin \widehat{C}}$$

Vérifient-elles (1) ?

$xY + yX - xy$ s'écrit $\quad x\beta + y\alpha - xy$

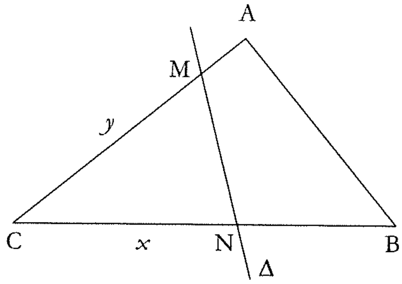
soit $\quad \dfrac{r}{\sin\widehat{C}}(x+y) - xy$

$\quad \dfrac{1}{\sin\widehat{C}}\left(pr - \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}\right)$.

Or $\dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$ et pr sont deux expressions de l'aire de ABC (cf. méthode 2 pour pr).

Les coordonnées de I vérifient donc l'équation (1) : (Δ) passe par I .

Méthode 4 (Henri BAREIL)



M =bar

A	**C**
y	$b - y$

(bar = barycentre)

N = bar

B	**C**
x	$a - x$

et, résultat classique,

I = bar

A	B	C
a	b	c

Pour tout point P de (MN), il existe deux nombres α et β tels que P soit le barycentre de :

A	B	C
αy	βx	$\alpha(b-y)+\beta(a-x)$

Pour que I soit sur (MN), il faut et il suffit qu'il existe α et β permettant d'identifier I comme un barycentre de M et N (α et β définis à une proportionnalité près).

Ce que permet $\alpha = \dfrac{a}{y}$ et $\beta = \dfrac{b}{x}$ avec, dès lors, la condition nécessaire et suffisante :

$$\alpha(b-y)+\beta(a-x)=c$$

soit
$$\frac{a}{y}(b-y)+\frac{b}{x}(a-x)=c$$

$$\frac{ab}{y}-a+\frac{ab}{x}-b=c$$

i.e.
$$ab\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=a+b+c.$$

Donc (MN) passe par I si et seulement si : $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{2p}{ab}$.

Lorsque (MN) remplit les deux conditions imposées, il y a égalité puisque

$$x+y=p \text{ et } xy=\frac{ab}{2}.$$

Donc I est sur (MN).

Commentaires

a) de l'équipe académique

L'exercice a été trouvé difficile et n'a pas été réussi. Les élèves ont semblé avoir oublié la définition du « cercle inscrit ». Assez souvent le « centre du cercle inscrit » a été confondu avec le « centre du cercle circonscrit » ou avec le « centre de gravité ». Le mot « polygone » a semblé les avoir perturbés : pour eux, un triangle ne pouvait pas être un polygone. Pour cet exercice ils ont très peu utilisé un dessin.

b) des rédacteurs de la brochure

La production des quatre méthodes de résolution dédouane l'exercice. Mais la géométrie élémentaire n'est-elle pas l'une des victimes de connaissances vécues au jour le jour sans souci de mémorisation ? La réduction d'horaire aidant …

c) Droite divisant un triangle …

L'énoncé semble trouver naturelle l'existence d'une telle droite … Or rien n'est moins évident !

Nous donnons en annexe, une étude de l'existence de telles droites. Elle est fondée sur une théorie du second degré, entre autres de la position d'un nombre par rapport aux racines, quand elles existent, d'un trinôme du second degré.

Les théorèmes alors utilisés peuvent se comprendre et se justifier aisément, notamment graphiquement à partir de la parabole représentative du trinôme.

Déroulement de l'épreuve

Sur 114 élèves inscrits, 101 (51 filles et 50 garçons) ont participé à l'épreuve dans quatre centres d'examen choisis pour minimiser les déplacements.

Les candidats provenaient de 10 lycées sur 14.

L'épreuve a été annoncée par les médias locaux : RFO, RCI, A1, France Antilles.

La relative forte participation, s'explique par le fait que la Cellule Académique accepte la candidature de tous les élèves volontaires. *Il n'y a pas de sélection par les enseignants.* Ces Olympiades jouissent d'un certain engouement auprès des élèves qui semblent prendre plaisir à chercher même s'ils ne trouvent pas. Ces élèves semblent accepter des exercices de recherche, dans le cadre non évalué des Olympiades. Il n'y a pas un grand risque de ne pas savoir faire. Ces élèves ont tous participé au rallye mathématique de l'IREM depuis les classes du Primaire. Il n'y a pas de préparation organisée dans les établissements.

Remise des prix et palmarès

Remise des prix :

La remise des prix s'est faite en présence des médias suivants : France Antilles et A1.

Un article est paru dans le France-Antilles du mardi 1 Juillet 2003, et un sujet a été présenté au journal d'information de A 1 le lundi 30 Juin et rediffusé le matin du 1 Juillet 2003.

20 élèves ont été primés, 12 filles et 8 garçons.

Voici les quatre premiers :

1er	ONESTAS Lesly	LGT Baimbridge
2ème	ETIENNE Claudia	LGT Gerville Réache
3ème	NEBOT Thoïne	LPO Baimbridge
3ème ex-aequo	LAUMUNO Thomas	LGT Petit Bourg

Annexe

EXISTENCE DE DROITES-SOLUTIONS (par Raymond RAYNAUD)

Recherchons combien il y a de droites-solutions coupant deux côtés donnés [AB] et [AC].
Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $b < c$.

Soit D_{xy} la droite qui coupe les segments [AB] et [AC] en M et N tels que $AM = x$ et $AN = y$.

$$(D_{xy} \text{ est une droite-solution}) \Leftrightarrow \left(x + y = p \text{ et } xy = \frac{bc}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \text{ et } y \text{ sont racines de l'équation (e) : } X^2 - pX + \frac{bc}{2} = 0\right).$$

Donc x et y étant deux réels positifs, D_{xy} est une droite-solution si et seulement si

$$\left|\begin{array}{l} \text{l'équation (e) a deux racines } x', x'' \ (x' \le x''), \\ \{x, y\} = \{x', x''\} \\ x' < b \quad x'' < c. \end{array}\right.$$

Nous désignons par $f(x)$ le premier nombre de l'équation (e) et nous aurons besoin des nombres suivants :

$$\Delta = p^2 - 2bc, \quad f(b) = \frac{b(b-a)}{2}, \quad f(c) = \frac{c(c-a)}{2}.$$

1- Si $b < c < a$ alors $f(b) < 0$ et $f(c) < 0$ (e) a des racines et $x' < b < c < x''$
Il n'y a pas de droite solution coupant les deux petits côtés.

2- Si $b < a < c$ alors $f(b) < 0$ et $f(c) > 0$ (e) a des racines et $x' < b < x'' < c$
Il y a une droite solution unique coupant le petit côté et le grand côté.

3- Si $a < b < c$ alors $f(b) > 0$ et $f(c) > 0$
Si (e) a des racines, *b* et *c* sont extérieures à leur intervalle.

$4\Delta = a^2 + 2(b + c)a + b^2 + c^2 - 6bc$. 4Δ est un trinôme en a dont le discriminant est $\delta' = 8bc$. Le trinôme a deux racines :
$a' = -(b+c) - \sqrt{8bc}$, $a'' = -(b+c) + \sqrt{8bc}$. **($\Delta \geq 0$) $\Leftrightarrow$ ($a \geq a''$).**

Si $a < -(b + c) + \sqrt{8bc}$ l'équation (e) n'a pas de racine.
Il n'y a pas de droite solution coupant les deux grands côtés.
Supposons désormais que $a \geq -(b+c) + \sqrt{8bc}$. L'équation (e) a deux racines : $x' = \dfrac{p - \sqrt{\Delta}}{2}$, $x'' = \dfrac{p + \sqrt{\Delta}}{2}$ et b et c sont extérieurs à $[x', x'']$.

- $\dfrac{x' + x''}{2} = \dfrac{a + b + c}{4} < \dfrac{b + c}{2}$

Donc la disposition $b < c < x' < x''$ est exclue.

- $x' = \dfrac{a + b + c}{4} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2} < \dfrac{2b + c}{4}$, **en outre $c < a + b < 2b$. Donc $x' <$** $\dfrac{4b}{4} = b$.

Donc la disposition $b < x' < x'' < c$ est exclue.

- **Il** reste donc celle-ci : $x' < x'' < b < c$.

Il y a deux droites solutions coupant les deux grands côtés.

Elles sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.
Elles sont confondues si $a = -(b+c) + \sqrt{8bc}$.

En résumé … *Il y a toujours au moins une droite solution :*

Cas d'un triangle non isocèle :

1° Parmi les droites coupant **les deux côtés les plus petits**
il n'y a pas de droite solution.
2° Parmi les droites coupant **le côté le plus petit et le côté le plus grand**
il y a une droite solution
3° Parmi les droites coupant les deux côtés les plus grands
ou bien il y a deux droites distinctes ou confondues
ou bien il n'y a pas de droite solution.

Précisons ce dernier point en supposant que $a < b < c$:

Si $a > -(b+c)+\sqrt{8bc}$ **il y a deux droites solutions distinctes.**

Si $a = -(b+c)+\sqrt{8bc}$ **ces deux droites sont confondues.**

Si $a < -(b+c)+\sqrt{8bc}$ **il n'y a pas de droite solution.**

Cas d'un triangle isocèle ***(Les relations se déduisent de l'étude générale).***

1° Parmi les droites coupant les deux côtés qui ne sont pas la base, par exemple [AB] et [AC] **si** $\left(\sqrt{8}-2\right)b \le a < b$ **il y a 2 droites solutions**

si non il n'y a pas de droite solution.

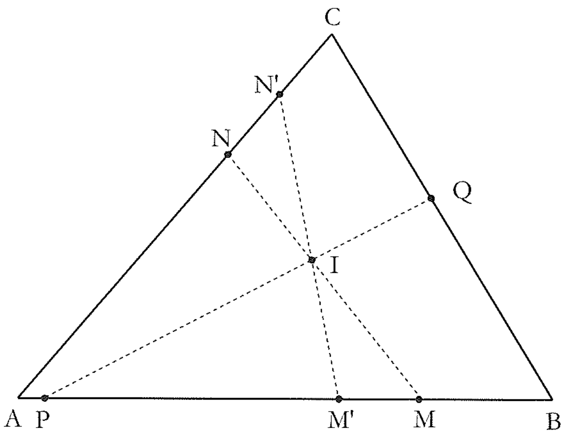
2° Parmi les droites coupant la base et un côté,

il y a une seule droite solution : l'axe de symétrie du triangle.

Si le triangle isocèle est équilatéral

il y a 3 droites solutions : les trois axes de symétrie.

Deux exemples :



BC = 8, CA = 9, AB = 10

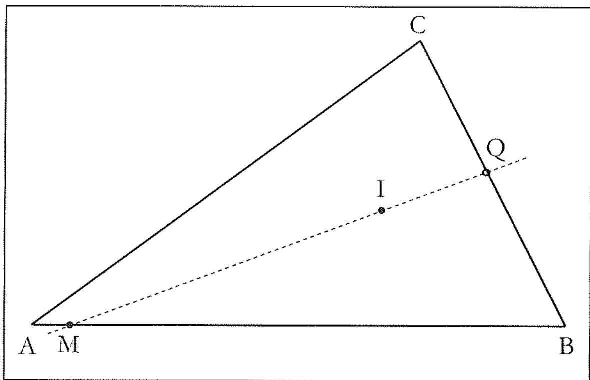
3 droites solutions dont deux symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{A}$.

AM = AN' = 7.5

AN = AM' = 6

BP ≈ 9,1

BQ ≈ 4,4



BC = 6, CA = 9, AB = 10

1 droite solution

BM ≈ 9,26

BQ ≈ 3,24

Où les expériences confirment la théorie...

Droites coupant les deux côtés les plus petits ([AB] et [AC]) :

a	b	c	p	Δ	$-(b+c)+\sqrt{8bc}$	x'	x''	Dte Solut.
10	9	9,5	14,25	32,0625	7,653394	4,293812	9,956188	0
10	9,9	9,95	14,925	25,7456	8,222050	4,925493	9,999507	0

Droites coupant le petit côté et le grand côté :

a	b	c	p	Δ	$-(b+c)+\sqrt{8bc}$	x'	x''	Dte Solut.
10	3	15	14	106	0,973666	1,852185	12,147815	1
10	8	11	14,5	34,25	7,532998	4,323825	10,176175	1
10	9,9	10,1	15	25,02	8,282857	4,999000	10,001000	1

Droites coupant les deux côtés les plus petits ([AB] et [AC]) :

a	b	c	p	Δ	$-(b+c)+\sqrt{8bc}$	x'	x''	Dte Solut.
8	10	12	15	-15	8,983867			0
9	10	12	15,5	0,25	8,983867	7,500000	8,000000	2
8,9	10	112	15,492	0,00005	8,983867	7,745022	7,746911	2
8,98	10	12	15,49	-0,0599	8,983867			0

Droites coupant les deux côtés autres que la base $b = c = 10$:

a	b	c	p	Δ	$-(b+c) + \sqrt{8bc}$	x'	x''	Dte Solut.
10,1	10	10	15,05	23,5025	8,284271	4,950971	10,099029	0
9,9	10	10	14,95	23,5025	8,284271	5,051031	9,898968	2
8,5	10	10	14,25	3,0625	8,284271	6,125	8	2
8,28	10	10	14,142	3,6 e-08	8,284271	7,070973	7,071162	2
8,28	10	10	14,142	-0,0038	8,284271			0

Droites coupant la base [AB] et un côté [AC]. AC = BC = 10 :

a	b	c	p	Δ	$-(b+c) + \sqrt{8bc}$	x'	x''	Dte Solut.
10	10	14	17	9	9,466401	7	10	1
10	10	2	11	81	0,649110	1	10	1

A propos de l'existence de la droite (François Lo Jacomo) :

L'existence d'au moins une droite solution est intuitivement évidente par le raisonnement que voici :
Considérons une droite quelconque (D) passant par I, qui divise le triangle en deux polygones de périmètres inégaux (donc d'aires inégales). Hachurons le plus grand des deux, et faisons tourner la droite autour de I, en maintenant hachuré le polygone de plus grand périmètre : la surface hachurée va nécessairement « traverser » la droite, sinon, lorsque la droite aura tourné d'un demi-tour, le polygone hachuré aura lui aussi tourné d'un demi-tour, il ne sera pas le même que le polygone initial, ce qui est absurde. Il existe donc au moins une position de la droite pour laquelle on peut hachurer indifféremment chacun des deux polygones, qui ont donc même périmètre, et même aire car la droite passe par I.