Exercice n^{o} 4 **(Séries autres que S)**

Enoncé

Les palindromes

Un nombre palindrome est un nombre entier non nul qui peut se lire de la même manière dans les deux sens (par exemple : 12 321).
S'ils sont rangés dans l'ordre croissant, le premier de ces nombres est 1 alors que 55 porte le numéro 14. On dit aussi que 55 est le 14$^{\text{ème}}$ nombre palindrome.

1) Quel est le 5$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?
2) Quel est le 20$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?
3) Donner le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres, puis celui du dernier nombre palindrome à 3 chiffres.
4) Un (très) jeune mathématicien, spécialiste des nombres palindromes, protège les résultats de ses recherches dans un coffre-fort dont la combinaison comporte quatre chiffres.
   Pour se souvenir de la combinaison d'ouverture du coffre, le chercheur, âgé de 22 ans, utilise le seul nombre palindrome dont le quotient par son rang dans la liste des nombres palindromes est l'âge du mathématicien.

   Quelle peut bien être la combinaison choisie par le savant ?

Solution

Questions 1, 2 et 3
Le cinquième nombre palindrome est 5, et le vingtième est 111. Le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres est 19, et celui du dernier est 108.

Question 4
L'énoncé admet l'existence et l'unicité de la solution.
On peut tout d'abord essayer de dénombrer les nombres palindromes qui nous intéressent.
Il existe 9 nombres entiers (1, 2, ..., 9) qui sont les premiers.
Puis viennent les nombres palindromes à deux chiffres, faciles à trouver comme 11, 22, ..., 99. Il en existe 9.
Puis viennent ceux dont l'écriture possède trois chiffres, comme 101, ou bien 242. Ils ont le même chiffre des centaines et des unités. Comme on ne peut pas prendre 0, il reste 9 possibilités couplées avec les 10 cas différents du chiffre des dizaines, soit 90 nombres palindromes à trois chiffres.
Les nombres palindromes à quatre chiffres ont les chiffres des milliers et des unités identiques, mais aussi les mêmes chiffres des centaines et des dizaines. C'est le cas de 3223, ou bien de 6776. Ils sont faciles à dénombrer, puisqu'il suffit de s'intéresser aux deux derniers chiffres. Pour les mêmes raisons que précédemment, on ne peut pas utiliser 0 comme chiffre des unités, ce qui laisse 90 cas différents.

D'où le tableau :

Nombres	<10	de 10 à 99	de 100 à 999	de 1000 à 9999
Effectifs	9	9	90	90
Effectifs cumulés	9	18	108	198

Finalement, les nombres qui nous intéressent sont les nombres palindromes de 1001 à 9999, c'est-à-dire ceux qui sont situés entre les places 109 et 198.

D'après l'énoncé, il faut que ces nombres palindromes soient multiples de 22.
Comme $22 = 2 \times 11$, on recherche des multiples de 2 et de 11.
Or, tout nombre palindrome est multiple de 11. Cela ne constitue donc pas un critère de choix. (En effet, soit $abba$ un nombre palindrome à quatre chiffres, on a : $1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \times (91a + 10b)$).

Par ailleurs, les multiples de 2 se reconnaissent à leur terminaison, qui est 0, 2, 4, 6, ou 8. On a vu qu'il n'existait pas de nombre palindrome à quatre chiffres se terminant par zéro, donc la liste des éventualités est réduite ici à 40 nombres.
Il suffit maintenant de lister les possibilités.
Il existe 10 nombres palindromes se terminant par 2. Le premier 2002 porte le numéro 119 dans le classement, alors que le dernier 2992 porte le numéro 128.
Comme $119 \times 22 = 2618 > 2002$ et comme $128 \times 22 = 2816 < 2992$, on peut assurer que notre solution est comprise entre 2002 et 2992.

La calculatrice permet facilement de vérifier qu'il s'agit de 2772, situé au $126^{\text{ème}}$ rang dans la liste.