LIMOGES

Exercice n° 1

Enoncé

Un problème de magie

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On écrit successivement les entiers de 1 à n^2 dans les cases d'un tableau carré à n lignes et n colonnes en les plaçant de gauche à droite et de haut en bas.

On choisit un de ces nombres au hasard que l'on entoure et on barre tous les autres nombres de sa ligne et de sa colonne.
Parmi les nombres non entourés et non barrés, on en choisit un au hasard que l'on entoure et on barre tous les autres nombres de sa ligne et de sa colonne.
On recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre que l'on entoure.
On fait la somme S de tous les nombres entourés.

1. On étudie le cas $n = 3$. Ci-dessous, on a un exemple d'état final et $S = 4 + 2 + 9$ donc $S = 15$.

~~1~~	2	~~3~~
4	~~5~~	~~6~~
~~7~~	~~8~~	9

Représenter tous les états finaux possibles et vérifier qu' à chaque fois, on trouve $S = 15$.

2. On étudie le cas $n = 4$. Montrer que chaque état final conduit à une même somme S que l'on déterminera.

3. Etudier de même le cas $n = 17$.

Solution (Paul-Louis Hennequin)

Une fois les nombres entourés ou barrés, il reste un seul nombre entouré dans chaque ligne et chaque colonne et réciproquement une telle configuration peut être obtenue en entourant par exemple les nombres ligne après ligne.
Soit alors dans la $i^{\text{ème}}$ ligne α_i la colonne du nombre entouré. Ce nombre est $n(i-1)+\alpha_1$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} n(i-1)+\alpha_1$

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ étant une permutation de $(1, \ldots n)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

donc

$$S_n = n\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}\left(n(n-1)+n+1\right) = \frac{n}{2}(n^2+1)$$

On trouve en particulier : $S_3 = 15,\ S_4 = 34,\ S_{17} = 2\ 465$.

Exercice n° 2 (séries autres que S)

Enoncé

Tous comptes faits

On choisit cinq nombres entiers positifs a, b, c, d et e vérifiant $a < b < c < d < e$. On les additionne deux à deux de toutes les façons possibles. On obtient ainsi tous les nombres entiers de 10 à 20 sauf un seul, compris, au sens large, entre 12 et 18.
Trouver toutes les solutions possibles. On pourra s'aider éventuellement du tableau suivant :

$a+b$	$a+c$	$a+d$	$a+e$
	$b+c$	$b+d$	$b+e$
		$c+d$	$c+e$
			$d+e$

Eléments de solution

1ère étape : dans la table d'addition ainsi constituée, on peut placer les valeurs (dont on sait qu'elles sont représentées), 10,11,19 et 20.
En effet, la somme minimale est 10, donc $a + b = 10$.
Ensuite, entre $a + c$ et $b + c$, la plus petite est $a + c$, donc $a + c = 11$.
De la même manière, on trouve $d+e = 20$ et $c+e = 19$.
Par ailleurs, $a + b > a + a$ donc $2a < 10$ ce qui signifie $a < 5$.

10 $a+b$	**11** $a+c$	$a+d$	$a+e$
	$b+c$	$b+d$	$b+e$
		$c+d$	**19** $c+e$
			20 $d+e$

De la même manière, on trouve $b > 5$, $d < 10$ et $e > 10$. Pour a, on testera donc les valeurs 0,1,2,3,4. Si $a = 0$, cela implique $b = 10$. Donc les valeurs minimales de c, d, et e sont 11,12 et 13.
Cela donne, dans ce cas $d + e > 24$, ce qui est contraire aux hypothèses de départ.
Et ainsi de suite, il ne reste que $a = 3$ ou $a = 4$.
Si $a = 3$, on obtient $b = 7$ et c=8 directement. Et comme $c + e = 19$, on a $e = 11$ puis $d = 9$ avec $d + e = 20$.
Dans ce cas, toutes les sommes sont représentées, sauf 13.
$10 = a + b$; $11 = a + c$; $12 = a + d$; $14 = a + e$; $15 = b + c$; $16 = b + d$; $17 = c + d$; $18 = b + e$; $19 = c + e$; $20 = d + e$.
Si $a = 4$, on obtient $b = 6$ et $c = 7$ directement.
Et comme $c + e = 19$, on a $e = 12$ puis $d = 8$ avec $d + e = 20$.
Dans ce cas, toutes les sommes sont représentées, sauf 17.
$10 = a + b$; $11 = a + c$; $12 = a + d$; $13 = b + c$; $14 = b + d$; $15 = c + d$; $16 = a + e$; $18 = b + e$; $19 = c + e$; $20 = d + e$.
Il existe donc 2 solutions seulement, qui sont (3 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11) et (4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 12).