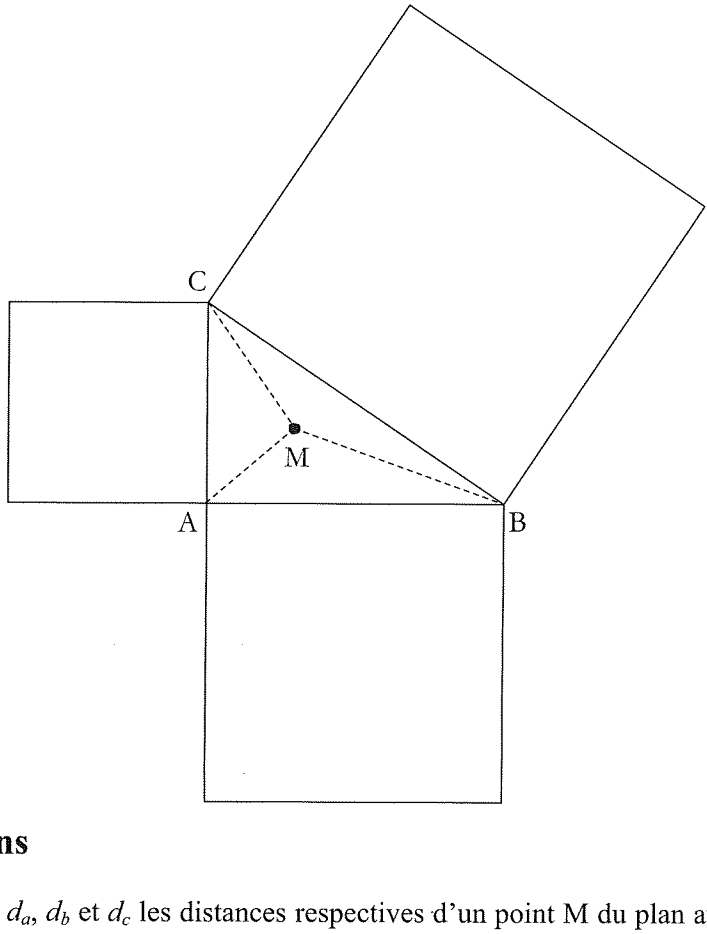
ACADÉMIE DE LYON

Le Lac

Trois propriétaires P_1, P_2, P_3 disposent chacun d'une parcelle de terrain carrée, jouxtant un lac triangulaire ABC rectangle en A. Ils décident de délimiter leurs « eaux territoriales » en plaçant une bouée M de telle sorte que les surfaces MAB, MBC et MCA soient proportionnelles aux aires des parcelles adjacentes.

Déterminer la position de cette bouée dans le lac.



Solutions

On notera d_a, d_b et d_c les distances respectives d'un point M du plan aux droites (BC), (CA) et (AB) ; a = BC, b = AC, c = AB.

Pour le point M cherché, on doit avoir :

$\frac{1}{2}ad_a = ka^2$, $\frac{1}{2}bd_b = kb^2$, $\frac{1}{2}cd_c = kc^2$, c'est- à dire $\frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c}$.

1- Méthode analytique :

$\vec{i} = \frac{1}{c}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ font de $(A, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. On cherche le couple (x, y) des coordonnées de M. Il faut calculer d_a ($d_b = x$ et $d_c = y$ pour un point M intérieur au triangle).

aire(MBC) = aire(ABC) – aire(MAC) – aire(MAB)

$\frac{1}{2}ad_a = \frac{1}{2}(bc - yc - xb)$ donc $d_a = \frac{bc - yc - xb}{a}$

d'où la condition : $\frac{x}{b} = \frac{y}{c} = \frac{bc - yc - xb}{a^2}$.

Donc $y = \frac{cx}{b}$ et $\frac{b^2c - (c^2 + b^2)x}{a^2b} = \frac{x}{b}$ $(c^2 + b^2 = a^2)$

d'où $\boxed{x = \frac{1}{2} \times \frac{b^2c}{a^2} \text{ et } y = \frac{1}{2} \times \frac{bc^2}{a^2}}$ or $b^2 < a^2$ et $c^2 < a^2$

donc $0 < x < \frac{1}{2}c$ et $0 < y < \frac{1}{2}b$.

M est donc dans le rectangle dont les sommets sont A et les milieux respectifs de [AB], [BC] et [CA] ; il est à l'intérieur du triangle ABC.

Le point M est donc unique et parfaitement déterminé par ses coordonnées.

2- Méthode « géométrique »

a) Soit M un point vérifiant $\frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c}$ c'est-à-dire : $cd_b - bd_c = 0$. Alors :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \left(\frac{d_b}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{d_c}{b}\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{d_c}{b}b^2 - \frac{d_b}{c}c^2 = bd_c - cd_b$$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

Le point M cherché est donc sur la hauteur [AH] issue de A du triangle ABC.

b) De plus, pour le point M cherché à l'intérieur du triangle,

$$\frac{1}{2}ad_a + \frac{1}{2}bd_b + \frac{1}{2}cd_c = \text{aire (ABC)}.$$

Or $\dfrac{d_a}{a}=\dfrac{d_b}{b}=\dfrac{d_c}{c}$ d'où $d_b=b\dfrac{d_a}{a}$ et $d_c=c\dfrac{d_c}{c}$

donc $\dfrac{1}{2}ad_a+\dfrac{1}{2}b^2\dfrac{d_a}{a}+\dfrac{1}{2}c^2\dfrac{d_a}{a}=\dfrac{1}{2}a\times \mathrm{AH}$ de plus, $b^2+c^2=a^2$

d'où $ad_a=\dfrac{1}{2}a\times \mathrm{AH}$ et $d_a=\dfrac{1}{2}\mathrm{AH}$.

Le point M est donc le milieu du segment [AH].

3- Autre méthode « géométrique » (H.B.)

Pour simplifier l'écriture, désignons les aires des triangles par des parenthèses, ainsi par « (MAB) » désignons l'« aire du triangle MAB ».

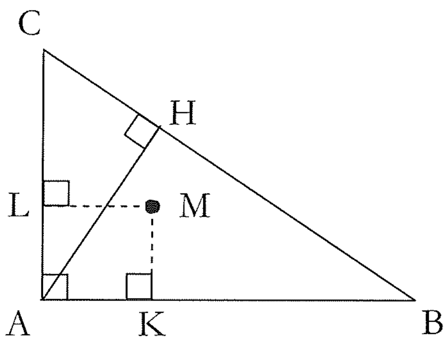
a) $\dfrac{(\mathrm{MBC})}{a^2}=\dfrac{(\mathrm{MAC})}{b^2}=\dfrac{(\mathrm{MAB})}{c^2}=\dfrac{(\mathrm{MAC})+(\mathrm{MAB})}{b^2+c^2}$

D'où (MBC) = (MAC) + (MAB)

$=\dfrac{1}{2}$(ABC).

M est donc à la distance $\dfrac{h}{2}$ (h = AH, H pied de la hauteur du triangle ABC issue de A) de (BC).

b)



2(MAC) = ML × AC

2(MAB) = MK × AB

D'où $\dfrac{\mathrm{ML}\times \mathrm{AC}}{\mathrm{AC}^2}=\dfrac{\mathrm{MK}\times \mathrm{AB}}{\mathrm{AB}^2}$ (1)

i.e. $\dfrac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MK}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

soit, successivement, $\dfrac{\mathrm{ML}}{\mathrm{AL}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$,

$\tan\widehat{\mathrm{MAL}}=\tan\hat{\mathrm{B}}=\tan\widehat{\mathrm{HAC}}$

$\widehat{\mathrm{MAL}}=\widehat{\mathrm{HAC}}$ (puisque H est intérieur à ABC)

M sur [AH].

Variante du b)

$$(\mathrm{MAB}) = \frac{1}{2}\mathrm{AM} \times \mathrm{AB} \times \sin \widehat{\mathrm{BAM}}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{MAC}) &= \frac{1}{2}\mathrm{AM} \times \mathrm{AC} \times \sin \widehat{\mathrm{CAM}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{AM} \times \mathrm{AC} \times \cos \widehat{\mathrm{BAM}}.\end{aligned}$$

De là $$\frac{(\mathrm{MAB})}{(\mathrm{MAC})} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \tan \widehat{\mathrm{BAM}} \quad (1)$$

Or on doit avoir : $\dfrac{(\mathrm{MAB})}{(\mathrm{MAC})} = \dfrac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2}$.

Pour cela, compte tenu de (1), il faut et il suffit que $\tan \widehat{\mathrm{BAM}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$

$$= \tan \widehat{\mathrm{BCA}}$$

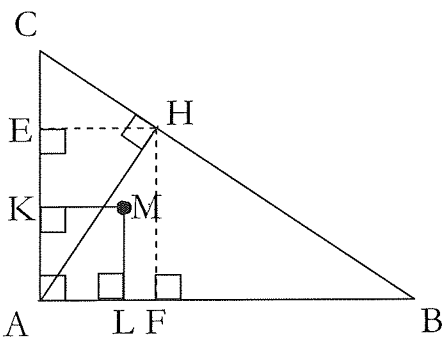
$$= \tan \widehat{\mathrm{BAH}}.$$

c) Conjuguons les conclusions des a) et b) : M est le milieu de [AH].

<u>*REMARQUES (Méthode 3).*</u>

1. Les a) et b) sont permutables

2. Le b) peut être remplacé par le a) de la méthode 2.
Et voici encore une variante :



Un dessin bien fait semble montrer que M pourrait être sur [AH].

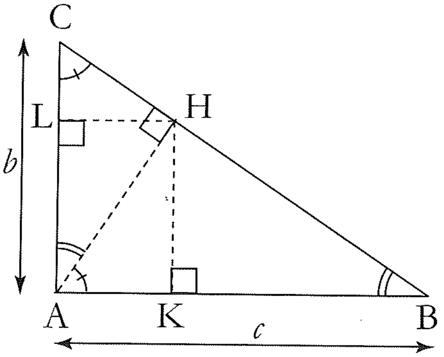
Etudions-le sur la figure-schéma ci-contre (où M est volontairement écarté de [AH] pour éviter de prendre subrepticement la conclusion comme hypothèse) :

Pour que M soit sur [AH], il faut et il suffit qu'il existe une homothétie transformant le rectangle ALMK en le rectangle AFHE .

Ce qui conduit à $\dfrac{\mathrm{HF}}{\mathrm{HA}} = \dfrac{\mathrm{ML}}{\mathrm{AM}}$, etc.

REMARQUE SUR LA MÉTHODE 1

Sa conclusion pourrait être précisée quant à la position de M, donnée par des coordonnées encore un peu … énigmatiques.



$\dfrac{bc}{a^2}$ est commun aux expressions de x et de y coordonnées de M. Or il s'écrit $\dfrac{b}{a} \times \dfrac{c}{a}$ soit, par exemple $\sin \widehat{C} \cos \widehat{C}$.

D'où $x = \dfrac{1}{2} b \sin \widehat{C} \cos \widehat{C}$

$= \dfrac{1}{2} \text{AH} \cos \widehat{C}$

$= \dfrac{1}{2} \text{AK}$

De même, $y = \dfrac{1}{2}$ AL.

M est le milieu de [AH].

Commentaire d'un membre de l'équipe académique

« Il semble que les candidats aient jugé cet exercice comme le plus difficile des quatre et aucun ne l'a traité complètement. »

« Un candidat a choisi la méthode 1, mais avec une erreur de calcul. »

« De nombreux candidats arrivent par le a) de la méthode 3 à :

aire(MBC) = $\dfrac{1}{2}$ aire(ABC) avec des explications plutôt confuses ou pas d'explications, mais ne savent pas comment continuer. »

« Les meilleures conclusions sont alors :
- « M est le milieu de [AH] » (sans justification)
- « M est sur le segment [B'C'], C' milieu de [AB] et B' milieu de [AC], mais je ne sais pas où … »

Autres commentaires

L'énoncé ne téléguide pas vers la conclusion précise : M milieu de [AH].
Mais un dessin **bien fait**, suffisamment grand, aurait pu faire conjecturer ce

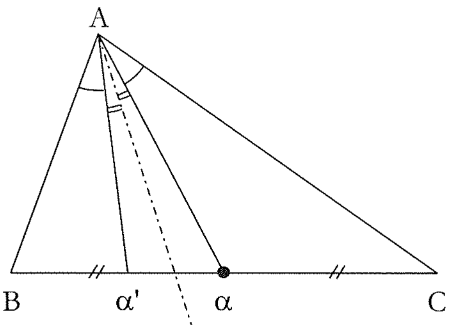
résultat. Ce qui aurait pu induire des démarches de démonstration et rendu plus accessible cet *intéressant* problème.

Annexe – par H.B. –

I- « Il est évident –dit notre correspondante académique – que le triangle a été choisi rectangle pour simplifier ce problème de recherche du point de Lemoine d'un triangle et l'adapter aux connaissances de la classe de première. »

Or, qu'est le « point de LEMOINE » ?
C'est le point de concours des *symédianes* d'un triangle.
Qu'est-ce qu'une « symédiane » ?
Soit la médiane ($A\alpha$). *Sa symétrique* ($A\alpha'$) *par rapport à la bissectrice de* $\widehat{BAC}$ *est une symédiane.* Idem à partir de B et de C.

La réciproque du théorème de Céva, entre autres, permet de démontrer aisément que les trois symédianes sont concourantes :



Faisons intervenir $\dfrac{\alpha'B}{\alpha'C}$ ainsi que $\dfrac{\alpha B}{\alpha C}$ et les égalités d'angles par symétrie, grâce à des rapports d'aires :

$$\frac{(AB\alpha)}{(AC\alpha')} = \frac{\alpha B}{\alpha' C} \text{ (d'une part)}$$

$$= \frac{AB \times A\alpha}{AC \times A\alpha'} \text{ (d'autre part)}$$

D'où $$\frac{\alpha B}{\alpha' C} = \frac{AB \times A\alpha}{AC \times A\alpha'}$$

De même $$\frac{\alpha' B}{\alpha C} = \frac{AB \times A\alpha'}{AC \times A\alpha}.$$

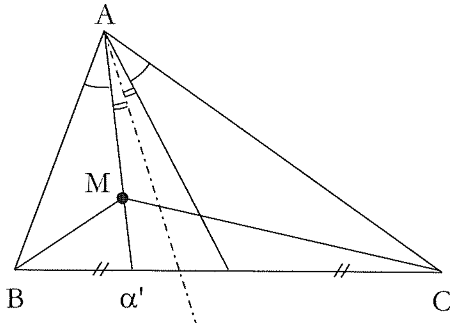
Multiplions membre à membre ces deux égalités (et utilisons $\alpha B = \alpha C$). Nous obtenons : $$\frac{\alpha' B}{\alpha' C} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Appliquons la réciproque du théorème « réduit » de Céva (sans mesures algébriques, quand les droites coupent les segments-côtés du triangle). Avec β et γ pieds des autres médianes : $\dfrac{\alpha' B}{\alpha' C} \times \dfrac{\beta' C}{\beta' A} \times \dfrac{\gamma' A}{\gamma' C} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \times \dfrac{BC^2}{BA^2} \times \dfrac{CA^2}{CB^2} = 1$.

(β' et γ' sont les pieds des autres symédianes).

Les symédianes sont concourantes.

II- Soit M le point de concours des symédianes.
Qu'en est-il de (MAB), (MAC), (MBC) vis-à-vis des longueurs des côtés ?



Faisons intervenir (MAB) et (MAC) comme différences d'aires :

$$\frac{(AB\alpha')}{(AC\alpha')} = \frac{(BM\alpha')}{(CM\alpha')} \left(= \frac{\alpha' B}{\alpha' C} \right).$$

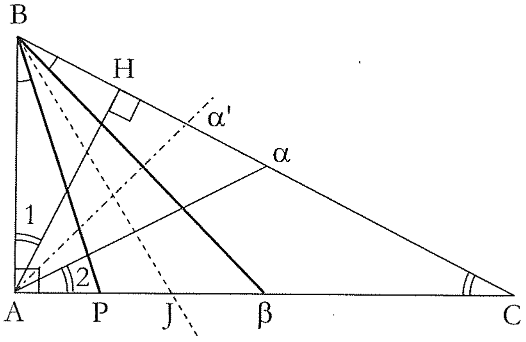
Donc, par différence :

$$\frac{(ABM)}{(ACM)} = \frac{\alpha' B}{\alpha' C}$$

$$= \frac{AB^2}{AC^2}$$

Nous retrouvons, en plus général, la propriété des aires qui démarre l'exercice : le point M est le barycentre de $\{(A,a^2), (B,b^2), (C,c^2)\}$.

ETUDE DIRECTE DES SYMÉDIANES D'UN TRIANGLE RECTANGLE



(1) ABC triangle rectangle en A et α milieu de [BC] :

$\widehat{A_1} = \widehat{C}$ et $\widehat{C} = \widehat{A_2}$ d'où :

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

et (AH) est la symédiane issue de A.

(2) Point de concours des symédianes :

Considérons la médiane (Bβ), la bissectrice (BJ), la symédiane (BP).
Les triangles rectangles ABH et CBA sont semblables et, du fait des égalités d'angles :
(BP) de ABH correspond à (Bβ) de ABC

Dès lors, puisque (Bβ) coupe [AC] en son milieu,
(BP) coupe [AH] en son milieu.

De même pour la troisième symédiane.
Les symédianes se coupent au milieu de [AH].

Déroulement de l'épreuve, palmarès

Inscrits : 174 présents : 171 15 primés :

1^{er}	Sylvain LEDRU	Lycée Saint Just	LYON 5°
$2^{ème}$	Lilian SANSELME	Lycée René Descartes	ST GENIS LAVAL
$3^{ème}$	Etienne SANCHEZ	Lycée Louis Armand	VILLEFRANCHE S/S

Un commentaire de François Lo Jacomo

Un résultat essentiel qui n'a pas été évoqué dans les diverses solutions de cet exercice, c'est que de manière très générale, si l'on appelle (MBC), (MCA), (MAB) les aires des triangles MBC, MCA et MAB (aires éventuellement négatives si M est extérieur à ABC, mais ce n'est pas le cas ici), M est barycentre de A, B, C affectés de coefficients (MBC), (MCA), (MAB). En effet, si M est barycentre de A(x), B(y), C(z), et si la droite (AM) coupe (BC) en A', les coordonnées barycentriques de A' sont (0, y, z) et M est barycentre de A(x), A'(y + z) donc $\frac{\text{MA'}}{\text{AA'}} = \frac{x}{x+y+z}$, ce qui entraîne $\frac{\text{(MBC)}}{\text{(ABC)}} = \frac{x}{x+y+z}$. Ce résultat est fondamental car c'est la manière la plus économique de calculer les coordonnées barycentriques des points remarquables du triangle, à commencer par le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit.

Le point M cherché est donc barycentre de A(a^2), B(b^2) et C(c^2). Comme $a^2 = b^2 + c^2$, M appartient à la droite d'équation : $x = y + z$, qui passe manifestement par les milieux de [AB] et [AC] de coordonnées (1, 1, 0) et (1, 0, 1) à proportionnalité près. Par ailleurs, (AM) coupe (BC) au point de coordonnées barycentriques (0, b^2, c^2), qui est le pied H de la hauteur issue de A : c'est une propriété classique du pied de la hauteur d'un triangle rectangle, résultant du fait que les triangles ABH, CBA et CAH sont semblables : $\frac{\text{BH}}{\text{HA}} = \frac{c}{b} = \frac{\text{HA}}{\text{CH}}$. A l'intersection de ces deux droites se trouve le milieu de [AH].

REMARQUE bibliographique :

Tout lecteur intéressé par le point de Lemoine … et « La géométrie du triangle » se trouvera bien du livre publié sous ce titre par Yvonne et René SORTAIS, aux éditions HERMANN.