EXERCICE n°1

ÉNONCÉ

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Le dé est posé sur une table, la face « 1 » contre cette table. Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base. A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme s de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant le « 1 » initial.

1) Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour s.

2) La somme s peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

SOLUTION 1
(Clermont-Ferrand)

Notons $n = 2q + 1$ le nombre d'étapes.

a) La somme minimale est obtenue pour :

$s = 1 + 2 + 1 + 2 + \ldots + 1 + 2$, ce qui donne : $s = (1 + 2)(q + 1) = \dfrac{3n + 3}{2}$.

Pour $n = 2001$, on trouve s **= 3003**.

La somme maximale est obtenue pour :

$s = 1 + 4 + 3 + 4 + 3 + \ldots + 3 + 4$, ce qui donne : $s = -2 + (3 + 4)(q + 1) = \dfrac{7n + 3}{2}$.

Pour $n = 2001$, on trouve s **= 7005**.

b) Toutes les valeurs entières intermédiaires sont obtenues de la manière suivante :
$1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + \ldots + 1 + 2$ puis
$1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 2 + \ldots + 1 + 2$ puis
$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 2 + \ldots + 1 + 2$ puis
$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + \ldots + 1 + 2$ etc, jusqu'à obtenir
$1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + \ldots + 1 + 3$.
Ensuite on recommence en transformant progressivement les 3 en 4 ; ceci fait, on change progressivement les 1 en 2, et enfin on change progressivement les 2 en 3.

SOLUTION 2

(E. Trotoux)

Le dispositif décrit permet de construire l'ensemble Ω des suites entières finies, le terme initial valant 1, à termes dans $\{1, 2, 3, 4\}$, et dont les termes consécutifs sont distincts. Notons $(u_n)_{0 \leqslant n \leqslant 2001}$ une suite ainsi construite après 2001 étapes. La somme S de tous les termes peut s'écrire après regroupement des termes deux par deux (nombre pair de termes) $S = \sum_{k=0}^{k=2001} u_k = \sum_{k=0}^{k=1000} (u_{2k} + u_{2k+1})$

Les termes consécutifs étant distincts, on a $3 \leqslant u_{2k} + u_{2k+1} \leqslant 7$ pour tout $k \in [0, 1000]$. Pour $k = 0$, sachant que $u_0 = 1$, on a $3 \leqslant u_0 + u_1 \leqslant 5$. L'encadrement suivant de S s'en déduit : $3 + \sum_{k=1}^{k=1000} 3 \leqslant S \leqslant 5 + \sum_{k=1}^{k=1000} 7$ c'est-à-dire : $3003 \leqslant S \leqslant 7005$.

Les bornes de S sont atteintes.
Pour 3003, il suffit de choisir la suite (v_k) telle que $v_k = 1$ si k est pair et $v_k = 2$ sinon.
Pour 7005, on choisit la suite (w_k) telle que $w_k = 4$ si k est impair, $w_k = 3$ si k est pair non nul et $w_0 = 1$.
Les valeurs maximale et minimale de S sont donc 7005 et 3003.

Prouvons maintenant que l'ensemble des valeurs prises par S est l'ensemble des entiers de l'intervalle $[3003, 7005]$.

A toute suite u de Ω on peut associer la suite finie t de 1001 termes obtenue par calcul des sommes partielles $t_k = u_{2k} + u_{2k+1}$ pour k de 0 à 1000. Une telle suite a son terme initial dans $[3, 5]$ et tous ses termes dans $[3, 7]$. La somme des termes de t est égale à celle de ceux de u. Montrons que toute suite entière vérifiant les contraintes des suites t possède au moins un antécédent dans Ω par l'association précédente.

Tout entier b de $[3, 5]$ peut s'exprimer par $b = 1 + x$ où $x \in [2, 4]$. Tout entier z de $[3, 7]$ peut se décomposer $z = x + y = y + x$ où $(x, y) \in [1, 4]^2$ avec $x = y$. Cette double décomposition permet de construire une suite de **Ω à termes consécutifs distincts**. Pour fabriquer u, on trouve d'abord $u_1 = t_0 - 1$, puis de proche en proche $(1 \leqslant k \leqslant 1000)$, on trouve u_{2k} et u_{2k+1} à l'aide de t_k que l'on décompose et de u_{2k-1} qui permet de choisir $u_{2k} = u_{2k-1}$.

L'ensemble des valeurs prises par les sommes des suites t est identique à celui des sommes de Ω. Pour déterminer cet ensemble, on utilise les suites du type t pour lesquelles les contraintes de définition sont plus simples :

$S = t_0 + \sum_{k=1}^{k=1000} t_k$ où $t_0 \in [3, 5]$ et $t_k \in [3, 7]$, pour $k \geqslant 1$. En généralisant (par récurrence en toute rigueur !) le fait que si $x \in [a, b]$ et $y \in [c, d]$ alors l'ensemble des valeurs prises par $x + y$ est l'ensemble des entiers $[a + c , b + d]$, on peut conclure que S prend toutes les valeurs entières de l'intervalle $[3+3+\ldots +3, 5+7+7+\ldots+7]$ c'est-à-dire : $[3 + 1000 \times 3 \; , \; 5 + 1000 \times 7]$.

Conclusion :

L'ensemble des valeurs prises est l'ensemble des entiers de l'intervalle [3003 , 7005].

SOLUTION 3
(Montpellier)

Le total le plus petit est obtenu en alternant des 1 et des 2, les 2 apparaissant après un nombre impair de mouvements.

Soit : $1 + 2 + 1 + 2 + \ldots + 1 + 2 + 1 + 2 =$ **3003**.

Le total le plus grand est obtenu en alternant des 4 et des 3, en commençant par un 4.

Soit : $1 + 4 + 3 + 4 + 3 + \ldots + 4 + 3 =$ **7005**.

On peut toujours ajouter 1 au total d'une série qui ne contient pas que des 3 et des 4, ce qui prouve que **tous les totaux intermédiaires peuvent être atteints**.

COMMENTAIRES
M. Regnault

Dans la ligne « jeux mathématiques » dont la résolution ne demande pas de connaissances particulières liées au programme de Première S, cet exercice est constitué de deux questions d'inégale difficulté :

La première ne nécessite qu'une lecture attentive pour bien analyser l'expérience proposée : signaler la particularité d'un dé tétraédrique qui permet le passage d'une face à une autre face quelconque par basculement autour d'une arête ; voir la liaison entre le nombre d'étapes et le nombre de termes de la somme (principale source d'erreurs).

La deuxième , plus difficile, demande d'établir qu'à partir de la suite de somme minimale il est possible de construire une suite dont la somme est supérieure d'une unité, puis de deux unités et ceci jusqu'à obtenir la suite de somme maximale, en tenant compte qu'une suite correspondant à un déroulement de l'expérience ne contient jamais deux termes consécutifs égaux.

Pour cette deuxième partie, les candidats se sont en général limités à une simple affirmation "oui" ou "non", avec davantage de souci de justification pour les partisans du "non". On peut signaler des tentatives d'application d'un cours sur les suites numériques en considérant la somme des nombres obtenus après n basculements : (S_n) pour $0 < n < 2001$ et même sont apparues (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Académie de Créteil

Pas de grosses difficultés dans cet exercice. Il fallait bien lire l'énoncé pour ne pas confondre le nombre d'étapes - 2001 - avec le nombre de chiffres - 2002 - y compris le premier "1". On trouvait alors facilement le total maximum - 7005 - ainsi que le minimum - 3003 - . Chaque total intermédiaire pouvait être obtenu puisque le dé tétraédrique permet de passer d'une face à n'importe quelle autre.